$\boxed{19.10.2021}$

METRICA & TOPOLOGIA

E insieme $\quad d : E \times E \longrightarrow [0,+\infty)$ t.c. $\forall x,y \in E$

(i) $d(x,y) = 0 \iff x = y$

(ii) $d(x,y) = d(y,x)$

(iii) $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$

$\Bigg\}$ (E,d) SPAZIO METRICO

Esempi: $\quad E = \mathbb{R} \quad d(x,y) = |x-y|$ valore assoluto

$E = \mathbb{C} \quad d(z,w) = |z-w|$ modulo su $\mathbb{C}$

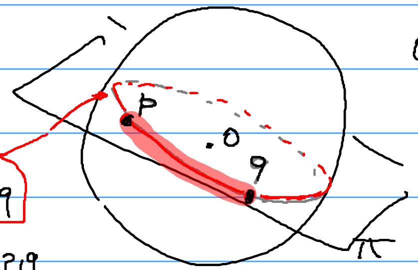
$E = \mathbb{R}^n \quad x = (x_1, \dots, x_n) \quad y = (y_1, \dots, y_n) \qquad d(x,y) = |x-y|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}$

$E = S \subseteq \mathbb{R}^3 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 = 1\}$ $\qquad O = (0,0,0)$

$p, q \in S$

π piano individuato da p, q, O ; $\boxed{\pi \cap S = C_{p,q}}$

$d_g(p,q) =$ lunghezza dell'arco più corto di $C_{p,q}$ compreso tra p e q



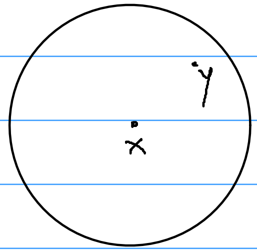
distanza geodetica sulla sfera

$\begin{cases} x \in E \\ r > 0 \end{cases} \qquad B_r(x) := \{ y \in E : d(x,y) < r \}$ palla di centro x e raggio r

A <u>INTORNO</u> di x se $\exists\, x \in E,\ r > 0$ t.c. $B_r(x) \subset A$

A <u>APERTO</u> se A è intorno di ogni $x \in A$

Oss: se $r>0$ $B_r(x)$ è un insieme aperto



$$y \in B_r(x) \Rightarrow d(x,y) < r \qquad d(x,y) = r-\delta \text{ con } \delta>0$$

se $z \in B_\delta(y) \Rightarrow d(x,z) \leq d(z,y) + d(y,x) < \delta + r - \delta = r$

$\Rightarrow z \in B_r(x)$

Quindi $B_\delta(y) \subset B_r(x)$

A CHIUSO se $E \setminus A$ è aperto

Proprietà degli aperti: (i) $\emptyset$, E sono aperti

(ii) se A_j aperti $\forall j \in \mathcal{J} \Rightarrow \bigcup_{j\in\mathcal{J}} A_j$ è aperto

(iii) $A_1, \dots, A_\ell$ aperti $\Rightarrow \bigcap_{j=1}^{\ell} A_j$ è aperto

Dim: (i) verifica diretta

(ii) $x \in \bigcup_{j\in\mathcal{J}} A_j \Rightarrow \exists j_0 \in \mathcal{J} : x \in A_{j_0} \Rightarrow \exists r>0 \; B_r(x) \subset A_{j_0} \subset \bigcup_{j\in\mathcal{J}} A_j$

(iii) $x \in \bigcap_{j=1}^{\ell} A_j \Rightarrow \forall j \in \{1,\dots,\ell\} \quad x \in A_j$

$\Downarrow \quad \exists r_j > 0 : B_{r_j}(x) \subset A_j \qquad r \doteq \min\{r_j : 1 \leq j \leq \ell\}$

$\Downarrow \quad B_r(x) \subset A_j \Rightarrow B_r(x) \subset \bigcap_{j=1}^{\ell} A_j$

⚠ intersezione infinita di aperti non è necessariamente aperto: $A_j = (-\frac{1}{j}, \frac{1}{j})$ $\quad \bigcap_{j=1}^{\infty} A_j = \{0\}$

$\mathcal{A} = \{ A \subseteq E \ : \ A \text{ aperto} \}$ TOPOLOGIA

<u>Oss</u>: Può capitare che metriche diverse definiscano la stessa topologia

Es: $E = \mathbb{R}^n$ $\quad x = (x_1, \dots, x_n)$ $\quad x' = (x'_1, \dots, x'_n)$

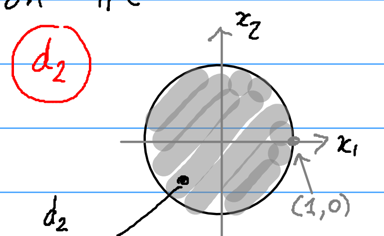
$$d_2(x,x') = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - x'_i)^2}$$

$$d_1(x,x') = \sum_{i=1}^{n} |x_i - x'_i|$$

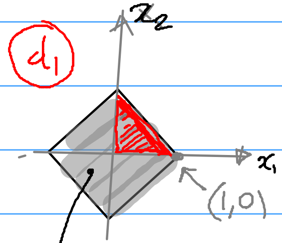
$$d_\infty(x,x') = \max\{ |x_i - x'_i| \quad 1 \le i \le n \}$$

Queste distanze definiscono la stessa topologia su E.

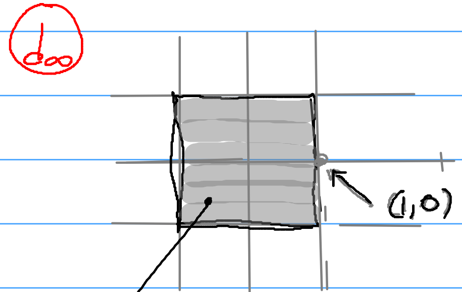
In $\mathbb{R}^2$



$B_1^{d_2}(0)$



$B_1^{d_1}(0) = \{ |x_1| + |x_2| < 1 \}$



$B_1^{d_\infty}(0) = \{ x : |x_1| < 1 \wedge |x_2| < 1 \}$

La topologia indotta da d_1 e d_2 è la stessa perché

$\forall x \in E \ \forall r > 0 \quad B_r^{d_1}(x) \subset B_r^{d_2}(x) \implies \mathcal{A}^{d_2} \subset \mathcal{A}^{d_1}$ $\ \Big\| \ $ $\forall x \in E \ \forall r > 0 \quad B_{cr}^{d_2}(x) \subset B_r^{d_1}(x) \implies \mathcal{A}^{d_1} \subset \mathcal{A}^{d_2}$

con $c = 1/\sqrt{n}$

Proprietà dei chiusi

(i) $\emptyset, E$ sono chiusi

(ii) A_j chiusi $\forall j \in J \Rightarrow \bigcap_{j \in J} A_j$ è chiuso (J insieme arbitrario)

(iii) $A_1, \dots, A_\ell$ chiusi $\Rightarrow \bigcup_{j=1}^{\ell} A_j$ è chiuso

Dim: (ii) A_j chiuso $\forall j \Rightarrow A_j^c$ è aperto $\forall j$

$$\left(\bigcap_{j \in J} A_j\right)^c = \bigcup A_j^c$$

$\longleftarrow$ è aperto in quanto unione di aperti

$$x \in \left(\bigcap_{j \in J} A_j\right)^c \Leftrightarrow x \notin \bigcap A_j \Leftrightarrow \neg\left(\forall j \in J \quad x \in A_j\right) \Leftrightarrow \exists\, j_0 \in J \text{ t.c. } x \in A_{j_0}^c \Leftrightarrow x \in \bigcup_{j \in J} A_j^c$$

Similmente per (iii)

$$\left(\bigcup_{j=1}^{\ell} A_j\right)^c = \bigcap_{j=1}^{\ell} A_j^c$$

$\longleftarrow$ questo è aperto, perché intersezione finita di aperti

DEF x è INTERNO ad $A \overset{def}{\iff} \exists r>0: B_r(x) \subset A$

x è ESTERNO ad $A \overset{def}{\iff} \exists r>0: B_r(x) \subset A^c$ ← x è interno a A^c

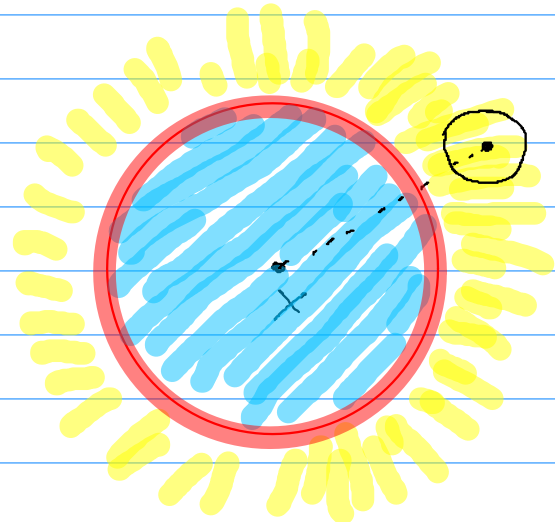
x è di FRONTIERA per $A \overset{def}{\iff} \forall r>0 \begin{cases} B_r(x)\cap A \neq \emptyset \\ B_r(x)\cap A^c \neq \emptyset \end{cases}$ ← x non è né interno né esterno

$$\mathrm{int}(A) \doteq \{x : x \text{ interno ad } A\}$$

$$\partial A \doteq \{x : x \notin \mathrm{int}(A) \wedge x \notin \mathrm{int}(A^c)\}$$

$$E = \mathrm{int}(A) \sqcup \partial A \sqcup \mathrm{int}(A^c)$$ ← unione disgiunta

Esempio: $B_r(x) = \mathrm{int}(B_r(x))$



$$\partial B_r(x) = \{y : d(x,y) = r\}$$

OSS: (i) A aperto $\iff A = \mathrm{int}(A)$

(ii) $\mathrm{int}(A)$ è un aperto

(iii) $\mathrm{int}(A)$ è il più grande aperto contenuto in A

Dim: (i) è la definizione di aperto

(ii): $x \in \mathrm{int}(A) \Rightarrow \exists r>0 : B_r(x) \subset A \underset{\substack{\uparrow \\ B_r(x) \text{ è aperta}}}{\Rightarrow} \forall y \in B_r(x)\ \exists r_1>0 : B_{r_1}(y) \subset A \Rightarrow B_r(x) \subset \mathrm{int}(A)$

(iii) $\left.\begin{array}{l} A' \subseteq A \\ A' \text{ aperto} \end{array}\right\} \Rightarrow \forall a \in A'\ \exists r : B_r(a) \subset A' \subseteq A \Rightarrow a \in \mathrm{int}(A)$

di conseguenza $A' \subset \mathrm{int}(A)$ #

DEF: ADERENZA

x è aderente ad $A \iff \forall r>0,\ B_r(x) \cap A \neq \emptyset$

$\bar{A} = \{$ insieme dei punti aderenti ad $A \}$ anche detto chiusura di A

Prop $\bar{A} = \mathrm{int}(A) \sqcup \partial A$ oss: $A \subset \bar{A}$

Dim: $x \in \bar{A} \iff \forall r>0\ B_r(x) \cap A \neq \emptyset \iff x \notin \mathrm{int}(A^c)$

$\iff x \in \left(\mathrm{int}(A^c)\right)^c = \mathrm{int}(A) \sqcup \partial A$ #

OSS: • $\overline{A} = \{x \in E : d(x,A) = 0\}$

dove $d(x,A) \doteq \inf\{d(x,a) : a \in A\}$

(Infatti: $x \in \overline{A} \iff$ esistono punti di A arbitrariamente vicini a x)

• se A è chiuso $A = \overline{A}$

• $\underbrace{\overline{A} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \{x : d(x,A) < \frac{1}{n}\}}_{\{x \in E : d(x,A) = 0\}}$ ← NB: questi sono insiemi aperti

• $\overline{A}$ è il più piccolo chiuso contenente A

DEF: x è di ACCUMULAZIONE per A sse

$$\forall r>0 \quad \left(B_r(x) \setminus \{x\}\right) \cap A \neq \emptyset$$

OSS: Se x è di accumulazione allora $\forall r>0$ $B_r(x)$ contiene infiniti elementi di A (diversi da x)

(Infatti se per un certo r_0 ce ne fosse solo un numero finito, potrei prendere un raggio $r_1 < r_0$, in modo che la palla $B_{r_1}(x)$ non contenga nessun elemento di A (diverso da x) e quindi x non sarebbe di accumulaz.)

DEF: Se $x \in A$ non è punto di accumulazione x si dice PUNTO ISOLATO

Esercizi per Casa:

- Determinare i punti di accumulazione dell'insieme

$$T = \left\{ \frac{1}{n} + \frac{1}{m} \,:\, n \in \mathbb{N}_*,\ m \in \mathbb{N}_* \right\}$$

- Se $A \subset \mathbb{R}$ aperto $\Longrightarrow A = \bigsqcup_{j \in \mathbb{N}} (\alpha_j, \beta_j)$ ← unione disgiunta

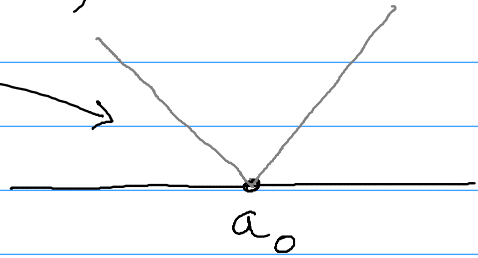
Ovvero ogni aperto di $\mathbb{R}$ è unione al più numerabile di intervalli disgiunti.

$\boxed{\text{21 ott 2021}}$ (E, d)

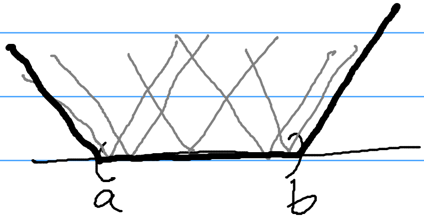
$$d(x, A) = \inf\{d(x,a) : a \in A\}$$

Esempi

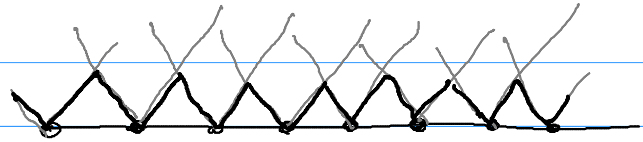
$d(x, a_0)$ $\longrightarrow$



$A = (a,b)$ $\longrightarrow$



$A = \mathbb{Z}$



Def: ρ-INTORNO di A

$$A_\rho := \{x \in E : d(x,A) < \rho\}$$ è aperto (per esercizio)

$$A_\rho = \bigcup_{a \in A} B_\rho(a)$$ $\longleftarrow$ x eserc.

Domanda: È sempre vero che $\overline{A_\rho} = \{x \in E : d(x,A) \le \rho\}$

[Sugg: NO. Fornire un controesempio]

(Vale però l'inclusione: $\overline{A_\rho} \subset \{x \in E : d(x,A) \le \rho\}$)

PROP: (i) $a_0 \in E$ $\quad |d(x,a_0) - d(y,a_0)| \leq d(x,y) \quad \forall x,y \in E$

(ii) $A \subset E$ $\quad |d(x,A) - d(y,A)| \leq d(x,y) \quad \forall x,y \in E$

— o —

$$E \longrightarrow [0,+\infty)$$
$$x \longmapsto d(x,A)$$

$L > 0$

DEF: $\varphi : E \to \mathbb{R}$ $\quad \varphi$ è L-Lipschitz $\overset{def}{\iff}$

$$|\varphi(x) - \varphi(y)| \leq L\, d(x,y) \quad \forall x,y \in E \qquad (*)$$

(Sopra avrei $\varphi(x) = d(x,A)$ $\quad L = 1$
la distanza da A è una funzione 1-Lip)

Promemoria:

$$|a| \leq b \iff \begin{cases} a \leq b \\ -a \leq b \end{cases}$$

$$(*) \begin{cases} \boxed{\varphi(x) - \varphi(y) \leq L\, d(x,y) \quad \forall x,y \in E} \\ -\varphi(x) + \varphi(y) \leq L\, d(x,y) \quad \forall x,y \in E \end{cases}$$

$\rhd$ Basta verificare questa, e scambiare x con y per ottenere l'altra
$(d(x,y) = d(y,x))$

—

Dim (prop) (i) basta verificare $d(x,a_0) - d(y,a_0) \leq d(x,y) \quad \forall x,y$

$$d(x,a_0) \leq d(x,y) + d(y,a_0)$$

per la disug. triangolare

$$\boxed{a\in A}$$

$$d(x,A) \le d(x,a) \le d(y,a) + d(x,y) \qquad \forall x,y \in E$$

$$d(x,A) \le d(y,a) + d(x,y) \qquad \forall a \in A$$

$$d(x,A) - d(x,y) \le d(y,a) \qquad \forall a \in A$$

È un minorante per l'insieme $\{d(y,a) : a\in A\}$

$$d(x,A) - d(x,y) \le \inf\{d(y,a) : a \in A\} = d(y,A)$$

l'inf è il massimo dei minoranti

$$d(x,A) - d(y,A) \le d(x,y) \qquad \forall x,y \in E$$

— o —

RIEPILOGO

(E,d) sp. metrico $\qquad A \subseteq E$

il più grande aperto contenuto in A

$$E = \underbrace{\mathrm{int}(A) \sqcup \partial A}_{\bar{A}} \sqcup \mathrm{int}(A^c)$$

$\bar{A}$ il più piccolo insieme chiuso contenente A

punti che no stanno in $\mathrm{int}(A^c)$.

x è di ACCUMULAZIONE per A se $\forall r>0$ $\quad B_r(x)\setminus\{x\} \cap A \neq \emptyset$

(eq. che $B_r(x) \cap A$ ha infiniti elementi)

notaz. alternativa

$D(A)$ $\to$ $A' = \{x \in E : x \text{ è di accumulazione per } A\}$ "insieme derivato"

Esercizio:
- $\bar{A} = A \cup A'$
- A chiuso $\Longleftrightarrow A \supset A'$
- $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cup \bar{B}$
- $\overline{A \cap B} \subset \bar{A} \cap \bar{B}$ ma può valere l'inclusione stretta

(*) Mostrare che $\bar{\bar{A}} = \bar{A}$

DEF: $a \in A$ si dice ISOLATO se $a \notin A'$

A si dice DISCRETO se tutti i punti sono isolati

A si dice DENSO sse $\bar{A} = E$

Esempi: $A = (a,b)$ $\quad A' = [a,b]$ $\quad \partial A = \{a,b\}$

$\mathbb{N}$ $\quad A' = \emptyset$ $\quad \mathrm{int}\,\mathbb{N} = \emptyset$ $\quad \partial \mathbb{N} = \mathbb{N}$ $\quad$ tutti i pti sono isolati

$\mathbb{Z}$

$\mathbb{Q}$ $\quad \mathrm{int}(\mathbb{Q}) = \emptyset$ $\quad \bar{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$

Q*: Esiste $A \subset \mathbb{R}$ tale che $\partial A = A = A'$

(Sugg: sì)

TOPOLOGIA & ORDINE in $\mathbb{R}$

Vale enunciato analogo per l'inf A

Prop: $A \subseteq \mathbb{R}$ $(A \neq \emptyset)$, $\sigma \doteq \sup A < +\infty$

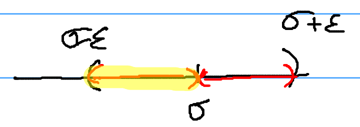
$\sigma \notin A \implies \sigma$ è punto di accumulazione per A

Dim: $\sigma = \sup A \overset{def}{\iff} \begin{cases} \sigma \geq a & \forall a \in A \quad (i) \\ \forall \varepsilon > 0 \ \exists a_0 \in A : & \sigma - \varepsilon < a_0 \quad (ii) \end{cases}$

se $\varepsilon > 0$ fissato $\exists\, a \in A : \sigma - \varepsilon \underset{(ii)}{<} a \underset{(i)}{\leq} \sigma$

$\sigma \notin A \implies \boxed{\exists a \in A : \sigma - \varepsilon < a < \sigma}$

$\forall \varepsilon > 0 \quad A \cap B_\varepsilon(\sigma) \setminus \{\sigma\} \neq \emptyset$

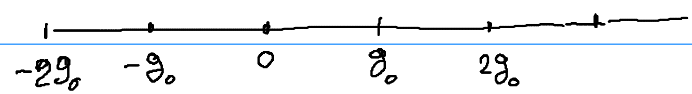


$(G \neq \{0\})$

PROP: $G \subset \mathbb{R}$ G sotto-gruppo additivo di $\mathbb{R}$ (es: $G = \mathbb{Z}$, $G = \mathbb{Q}$ ...

$g_0 := \inf G \cap (0, +\infty)$

- $g_0 = 0 \implies \overline{G} = \mathbb{R}$
- $g_0 > 0 \implies G = g_0 \cdot \mathbb{Z} \doteq \{ k g_0 : k \in \mathbb{Z} \}$



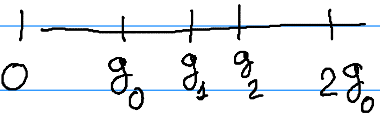
COR: (i) $\mathbb{Q}$ è denso

(ii) $\mathbb{Z}[\sqrt{2}] = \{ k + h\sqrt{2} : k, h \in \mathbb{Z} \}$ é denso in $\mathbb{R}$

2° caso

Dim (Prop): (Caso 1) $g_0 = \inf G \cap (0,+\infty)$ $\quad g_0 > 0$

$\boxed{\text{Allora } g_0 \in G}$ perché se così non fosse $g_0 \in G'$



$G \cap (0,+\infty)$

$\Rightarrow g_1 < g_2 \quad g_1, g_2 \in G$

$0 < g_2 - g_1 < g_0$

assurdo

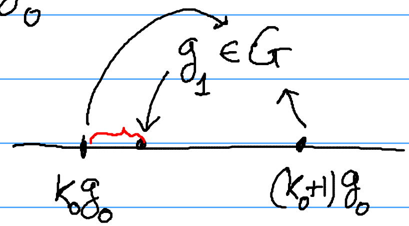
$g_1 < g_2 < 2g_0$

$0 < g_2 - g_1 < 2g_0 - g_1 < g_0$

$G \supset g_0 \mathbb{Z}$

$\boxed{\text{vale} \quad =}$ $\boxed{\text{x assurdo:}}$ $\exists\ g_1 \in G \setminus g_0 \mathbb{Z} \Rightarrow \exists\ k_0$ tale che

$$k_0 g_0 < g_1 < (k_0+1) g_0$$



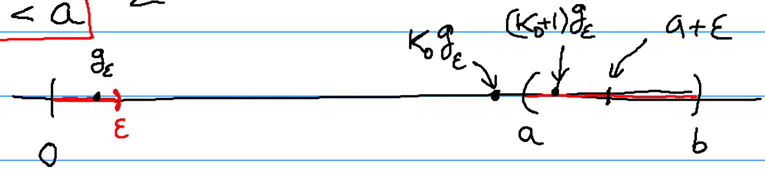
$g_1 - k g_0 \in G \cap (0,+\infty)$

$g_1 - k g_0 < g_0$ assurdo

1° Caso $\quad g_0 = 0 \quad g_0 \notin G \cap (0,+\infty) \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists\ g_\varepsilon \in G \cap (0,\varepsilon)$

G denso $\Leftrightarrow \forall (a,b) \subset \mathbb{R}$ non vuoto $\quad (a,b) \cap G \neq \emptyset \quad$ SPG $\quad a > 0$

Scelgo $0 < \varepsilon < \frac{b-a}{2}$ $\boxed{\& \ \varepsilon < a}$ $\qquad g_\varepsilon \in G \cap (0, \varepsilon)$



G gruppo $\Rightarrow$ $G \supset g_\varepsilon \cdot \mathbb{Z} = \{ k g_\varepsilon : k \in \mathbb{Z} \}$

sup. illimitato

$\{ k \in \mathbb{N} : k g_\varepsilon < a \}$. è un insieme finito e non vuoto

$k_0 = \max$ $\qquad (k_0+1) g_\varepsilon > a \qquad (k_0+1) g_\varepsilon = k_0 g_\varepsilon + g_\varepsilon < k_0 g_\varepsilon + \varepsilon$

$< a + \varepsilon < b$

$$\Rightarrow (k_0+1) g_\varepsilon \in (a,b) \cap G$$

$$T = \left\{ \frac{1}{n} + \frac{1}{m} \ : \ n, m \in \mathbb{N}_* \right\}$$

punti di accumulazione? T'

Prop: $T' = \underbrace{\left\{ \frac{1}{k} : k \in \mathbb{N}_* \right\} \cup \{0\}}_{D}$

$k \in D \Rightarrow k \in T'$ (per es.)

$T \subset [0, 2] \qquad T' \subset \overline{T} \subset [0, 2]$

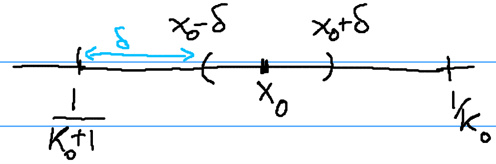
$x \in (1, 2]$ non è di accumulazione $\qquad T \cap (1, 2] = \left\{ 1 + \frac{1}{m} : m \in \mathbb{N}^* \right\}$

$x \in [0,1]$ $\quad x_0 \notin D \implies \exists\, k_0 \in \mathbb{N} \quad \frac{1}{k_0+1} < x < \frac{1}{k_0}$

Strategia

(1) è possibile scegliere $\delta > 0$ abbastanza piccolo in modo che

$$\begin{cases} x_0 + \delta < \frac{1}{k_0} \\ x_0 - \delta > \frac{1}{k_0+1} + \delta \end{cases}$$

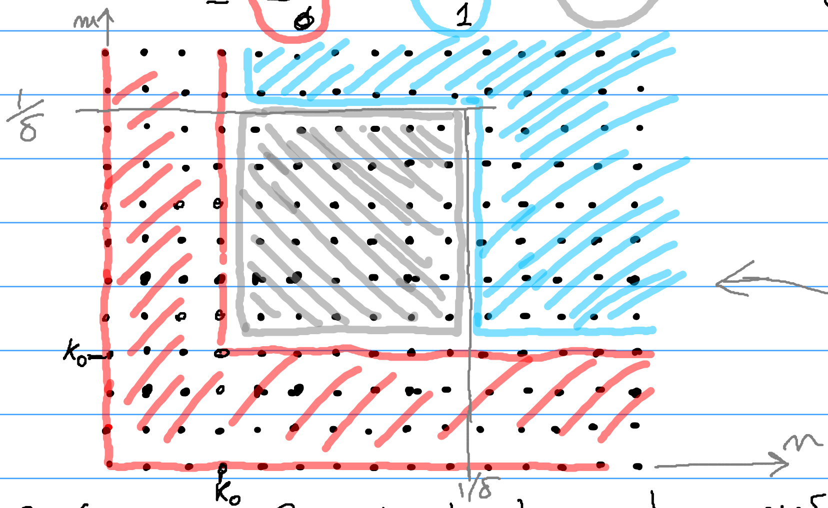


(2) $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* = C_0 \sqcup C_1 \sqcup C_2$ con $C_0 = \{(n,m) : n \leq k_0 \vee m \leq k_0\}$

$C_1 = \{(n,m) : (n > k_0 \wedge m > \frac{1}{\delta}) \vee (m > k_0 \wedge n > \frac{1}{\delta})\}$

$C_2 = \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* \setminus (C_0 \sqcup C_1)$

Vedi a lato



(3) Se $(n,m) \in C_0 \implies \frac{1}{n} + \frac{1}{m} > \frac{1}{k_0} > x_0 + \delta$

Se $(n,m) \in C_1 \implies \frac{1}{n} + \frac{1}{m} < \frac{1}{k_0+1} + \delta < x_0 - \delta$

$\implies \frac{1}{n} + \frac{1}{m} \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$

$\Downarrow$

$(n,m) \in C_2$

C_2 è un insieme finito

(4) x_0 ha un intorno dove cadono solo un numero finito di elementi di T, quindi $x_0 \notin T'$

$\boxed{\text{Q2 ott 2021}}$

$$T = \left\{ \frac{1}{n} + \frac{1}{m} \ : \ (n,m) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* \right\}$$

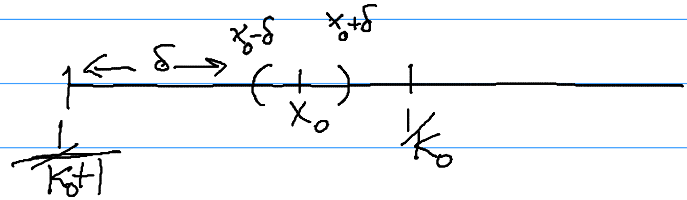
$$T' = \underbrace{\{0\} \cup \left\{ \frac{1}{k} ; \ k \in \mathbb{N} \right\}}_{\to D}$$

(1) $D \subseteq T'$ facile

(2) Se $x \notin D \Rightarrow x \notin T'$

$T' \subset [0,2]$; non ci sono pti di acc in $(1,2]$

se $\underbrace{x_0 \in (0,1) \setminus D}_{\frac{1}{k_0+1} < x_0 < \frac{1}{k_0}} \Rightarrow x_0$ non è di accumulazione.



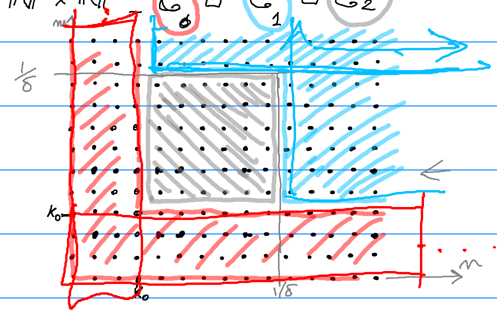
$x_0 + \delta < \frac{1}{k_0}$

$\frac{1}{k_0+1} + \delta < x_0 - \delta$

$T = \operatorname{Im} \varphi$

$$\varphi : \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(n,m) \longmapsto \frac{1}{n} + \frac{1}{m}$$

$\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* = C_0 \cup C_1 \cup C_2$



$C_0 = \{ (n,m) : n \leq k_0 \lor m < k_0 \}$

$C_1 = \left\{ (n,m) : \left(n > k_0 \ \& \ m > \frac{1}{\delta}\right) \cup \left(m > k_0 \ \& \ n > \frac{1}{\delta}\right) \right\}$

$C_2 =$ tutti gli altri

$\varphi(C_0) \subset [\frac{1}{k_0}, 2]$ $\quad (n,m) \in C_0 \quad \frac{1}{n} + \frac{1}{m} > \frac{1}{k_0} > x_0 + \delta$

$\varphi(C_1) \subset [0, \frac{1}{k_0+1} + \delta]$ $\quad (n,m) \in C_1 \Rightarrow \frac{1}{n} + \frac{1}{m} \leq \frac{1}{k_0+1} + \delta < x_0 - \delta$

$T \cap (x_0-\delta, x_0+\delta) \subset \varphi(C_2) \leftarrow$ sono in numero finito

$\Rightarrow x_0$ non è di accumulazione per T

$\overline{A \cap B} \subset \bar{A} \cap \bar{B}$ $\quad$ $A \cap B \subset \bar{A}$, $A \cap B \subset \bar{B}$

minimo chiuso contenente $A \cap B$

$B = B_r(x)$

$A = B^c$

$\bar{A} \cap \bar{B} = \partial B = \partial A$

- $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cup \bar{B}$

- $\overline{A \cup B} \subset \bar{A} \cup \bar{B}$ $\quad$ ovvia per lo stesso motivo di sopra

$\overline{A \cup B} \supset \bar{A} \cup \bar{B}$

$\quad \Psi$

$\quad x_0$ $\quad \forall r>0 \ \exists B_r(x_0) \cap A \neq \emptyset$

$\quad \vee$

$\quad // \ \exists B_r(x_0) \cap B \neq \emptyset$ $\quad \Rightarrow \forall r>0 \ \exists B_r(x_0) \cap (A \cup B) \Rightarrow x_0 \in \overline{A \cup B}$

- $\bar{A} = A \cup A'$ $\quad \boxed{\bar{A} \supset A \cup A'} \leftarrow \boxed{\begin{matrix} A \subset \bar{A} \\ A' \subset \bar{A} \end{matrix}}$

$\bar{A} = A \cup \partial A = A \cup (\partial A \cap A') \subset A \cup A'$ $\quad$ punti isolati

$\partial A = (\partial A \cap A') \cup (\partial A \setminus A') \leftarrow$

A chiuso $\Longleftrightarrow$ $A \supset A'$

$A = \bar{A} = A \cup A'$

$\left.\begin{array}{l} A \subseteq \mathbb{R} \\ A \text{ aperto} \\ \text{(non vuoto)} \end{array}\right\} \Rightarrow$ A è unione di una famiglia <u>numerabile</u> di <u>aperti</u> <u>disgiunti</u>

$x_0 \in A$ $\qquad \mathcal{J}_{x_0} = \{ J \subset A : x_0 \in J, \ J \text{ è un intervallo aperto} \}$

$$J_{x_0} = \bigcup_{J \in \mathcal{J}_{x_0}} J \quad \text{è} \begin{cases} \text{un intervallo aperto} \\ \text{contiene } x_0 \\ J_{x_0} \subset A \end{cases}$$

$y \in J_x \Rightarrow J_y \supset J_x \Rightarrow x \in J_y \Rightarrow J_x = J_y$

$$\underbrace{J_x \cap J_y}_{z} \neq \emptyset \Rightarrow J_x = J_z = J_y$$

$$A = \bigcup_{x \in A} J_x = \bigcup_{x \in A \cap \mathbb{Q}} J_x$$

$\cdot \ (\ \cdot \quad \cdot \ ) \ \cdot$

J_{x_0} fissato $\leadsto$ $q_0 = \min \{ q \in \mathbb{N}^* : \frac{1}{q} \cdot \mathbb{Z} \cap J_{x_0} \neq \emptyset \}$

$\frac{p_0}{q_0}$ elemento di $\left\{ \frac{p}{q_0} : p \in \mathbb{Z} \right\} \cap J_{x_0}$

che dista meno da 0

$J_{x_0} \rightsquigarrow \frac{p_0}{q_0}$ $\qquad \tilde{Q}$ = razionali ottenuti in questo modo a partire da J_{x_0} $(x_0 \in A)$

$\tilde{Q}$ è numerabile $\qquad A = \bigsqcup_{r \in \tilde{Q}} J_r$

$z \in \mathbb{C}$ $\qquad z = a + ib$ $\qquad a, b \in \mathbb{R}$, $\quad i^2 = -1$

$\bar{z} = a - ib$ $\qquad z \cdot \bar{z} = |z|^2 = a^2 + b^2$

$$\Phi(z) = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta} \qquad \Phi : \mathbb{C} \setminus \left\{ -\frac{\delta}{\gamma} \right\} \longrightarrow \mathbb{C}$$

$\alpha, \beta, \gamma, \delta$ parametri complessi (in generale)

se $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$ $\quad \alpha\delta - \beta\gamma > 0$

conserva $\mathbb{H} = \{ z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0 \}$ cioè $\Phi : \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{H}$

$\operatorname{Im} z > 0 \implies \operatorname{Im} \Phi(z) > 0$

se $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$ questa è una bijezione

$$\phi(z) = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta} = \frac{(\alpha z+\beta)\,(\overline{\gamma z+\delta})}{(\gamma z+\delta)\,(\overline{\gamma z+\delta})}$$

$\overline{\gamma z+\delta} = \gamma\bar{z} + \delta$ $\qquad \gamma,\delta \in \mathbb{R}$

$$= \frac{\alpha\gamma |z|^2 + \beta\delta + \boxed{\beta\gamma\bar{z} + \alpha\delta z}^{\,(*)}}{|\gamma z+\delta|^2}$$

$\leftarrow$ stanno in $\mathbb{R}$

$\beta\gamma(a-ib) = \beta\gamma a - i\beta\gamma b$

$\alpha\delta(a+ib) = \alpha\delta a + i\alpha\delta b$

$\oplus$ ———

$(*) \quad = a(\alpha\delta+\beta\gamma) + i b(\alpha\delta-\beta\gamma)$

$$\mathrm{Im}\,\phi(z) = \boxed{\frac{\alpha\delta-\beta\gamma}{|\gamma z+\delta|^2}\cdot \mathrm{Im}(z)}$$

$\mathrm{Im}(z) \leftarrow b$

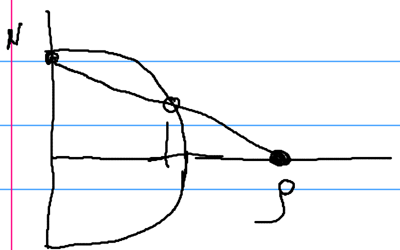
Esercizio:

$\psi(z) = \dfrac{iz+1}{z+i}$ verificare che $\psi: \mathbb{H} \xrightarrow{\sim} \mathbb{D} = \{z: |z|<1\}$

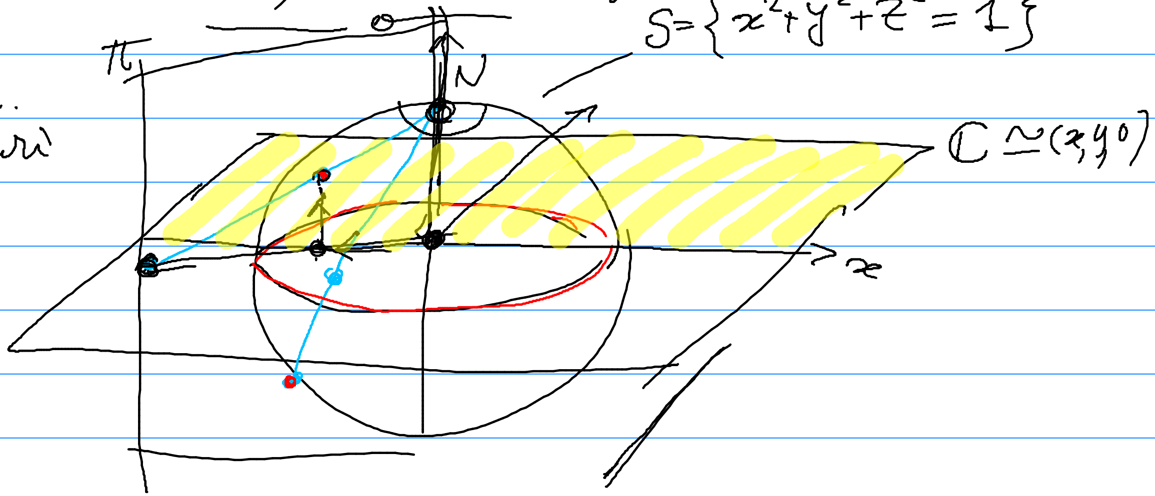
$\left(\mathrm{Im}(z) > 0 \Rightarrow |\psi(z)| < 1\right)$ + verificare che è una bigezione

$S = \{x^2+y^2+z^2 = 1\}$

Es: scrivere la bigez. in coordinate polari



$\mathbb{C} \xrightarrow{\sim} S \setminus N$



$\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\} \xrightarrow{\sim} S$ e $\phi(z) = \dfrac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}$

$\phi : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$
continue
per la top. indotta su $\overline{\mathbb{C}}$
dall'identificazione con S

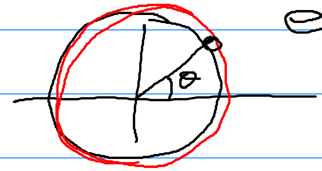
Risolvere
$z^2 = \bar{z}$ → con la forma cartesiana
→ con la forma polare

($z=0$ è sol)

$z^3 = \bar{z} z = |z|^2$

$\boxed{z = \rho e^{i\theta}}$ $\rho = a^2+b^2 \geq 0$

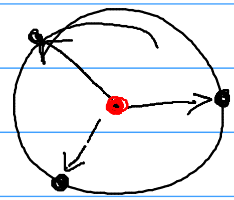
$z = a + ib = (a^2+b^2)\left(\dfrac{a}{a^2+b^2} + i\dfrac{b}{a^2+b^2}\right)$
$= \rho\,(\underbrace{\cos\theta + i \sin\theta}_{e^{i\theta}})$



$\rho^3 e^{i3\theta} = \rho^2$

$\boxed{\rho e^{i3\theta} = e^{i\cdot 0}} \longleftrightarrow \begin{cases} \rho = 1 \\ 3\theta = 0 + 2k\pi \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}$

$\begin{cases} \rho = 1 \\ \theta = k\dfrac{2\pi}{3} \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}$



———o———

Scomporre x^4+1 come prodotto

$x^4 + 1 = q_1(x) \cdot q_2(x)$ $q_i \in \mathbb{R}[x]$ $i = 1, 2$

$gr(q_i) = 2$

Calcolare $\displaystyle\sum_{k \in 3\mathbb{Z}} \binom{n}{k}$

Scomporre x^4+1 come prodotto

$$x^4+1 = q_1(x)\cdot q_2(x) \qquad q_i \in R[x] \qquad i=1,2$$

$$gr(q_i)=2$$

$$x^4+1 = \prod_{i=1}^{4}(x-\xi_i)$$

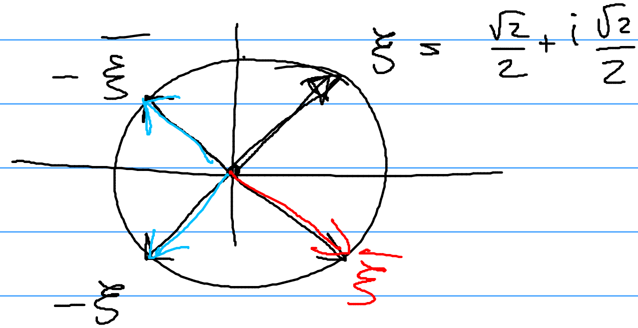
ξ_i sono le 4 soluzioni di

$$z^4=-1$$

$$\rho^4 e^{i4\theta} = e^{i\pi}$$

$$\begin{cases} \rho^4 = 1 \\ 4\theta = \pi + k2\pi \quad k\in\mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \rho = 1 \\ \theta = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} \end{cases}$$



$\xi = a+ib$

$$(z-\xi)(z-\bar{\xi}) = (z-a)^2+b^2$$

$$\left[\left(z-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\frac{1}{2}\right]\cdot\left[\left(z+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\frac{1}{2}\right]$$

$\boxed{\text{29 ott 2021}}$

$f: E \to \mathbb{R}$ $\qquad$ (E,d) sp. metrico

Def f L-lip $\iff$ $|f(x)-f(y)| \le L\, d(x,y)$

Prop: f L-Lip $\Longrightarrow$ f continua

Dim: Basta mostrare che $\lim_{x \to x_0} [f(x)-f(x_0)] = 0$

$$\underset{\downarrow \atop 0}{0} \le \underset{\downarrow x\to x_0 \atop 0}{|f(x)-f(x_0)|} \le \underset{\downarrow \atop 0}{L\, d(x,x_0)}$$

Applico il th. dei due carabinieri

Restrizione di f a U

$f: E \to \mathbb{R}$

Def: f loc. lip. $\overset{def}{\iff}$ $\forall a \in E$ $\exists U$ intorno di a $\exists L>0$ t.c. $f|_U$ è L-Lip

Prop: f loc. lip su E $\Rightarrow$ f è continua

Dim: $a \in E$ $\exists U$ int di a $\exists L>0$ t.c. $f|_U$ è L-lip $\Rightarrow$ $\lim_{x\to a} f(x)-f(x_0)=0$
$\Rightarrow$ f è continua

Es: $x \longmapsto \sqrt{x}$ (i) non è Lip su $[0,+\infty)$ $\qquad$ (e nemmeno su $(0,+\infty)$)
(ii) è loc. Lip su $(0,+\infty$
ed è continua su $[0,+\infty)$

[(i)] f è L-Lip $\iff$ $\left|\dfrac{f(x)-f(y)}{x-y}\right| \le L$ $\quad \forall x \neq y$ $\qquad$ (*)

la condizione (*) non è verificata su tutto $[0,+\infty)$ infatti

prendendo $f(x)=\sqrt{x}$, $y=0$ $\quad \left|\dfrac{f(x)-f(y)}{x-y}\right| = \left|\dfrac{\sqrt{x}-0}{x-0}\right| = \dfrac{1}{\sqrt{x}} \xrightarrow[x\to 0]{} +\infty$ quindi (*) non è verificata

OSS: $f(x)=\sqrt{x}$ è L-Lip su $[a,+\infty)$ $a>0$ con $L=\dfrac{1}{2\sqrt{a}}$

$$|\sqrt{x}-\sqrt{y}| = \left|\frac{x-y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}\right| \leq \frac{|x-y|}{2\sqrt{a}} \qquad \begin{cases}\sqrt{x}\geq\sqrt{a}\\ \sqrt{y}\geq\sqrt{a}\end{cases}$$

[(ii)] Se $x_0>0$, l'intervallo $[a,+\infty)$ è intorno di x_0 su cui
$a \doteq x_0/2$ $\qquad f$ è L-Lip $L=\dfrac{1}{2\sqrt{a}}$

$\Rightarrow f(x)=\sqrt{x}$ è Loc. Lip su $(0,+\infty)$

f è continua in 0: $\varepsilon>0$ fissato, scelgo $\delta:=\varepsilon^2$; se $x<\delta \Rightarrow |\sqrt{x}-0|=\sqrt{x}<\sqrt{\delta}=\varepsilon$
(verifica diretta) $\qquad$ cioè $f(B_\delta(0))\subset B_\varepsilon(0)$

Esercizio: Verificare che
$z\mapsto 1/z$ è loc lip su $\mathbb{C}^*$ (è L-Lip su $|z|\geq r$ con $L=\frac{1}{r^2}$)
$z\mapsto z^2$ è loc lip su $\mathbb{C}$ (" " $|z|\leq r$ con $L=2r$)
ma non sono lip. sul loro dominio

OSS: somma e prodotto di funz. continue è continua
(ma prod di funz. Lip può non essere Lip)

Prop (somme e prod. di funz. con limite finito) $\boxed{x_0 \text{ punto di accumulazione di } E}$

$g, f : E \setminus \{x_0\} \longrightarrow \mathbb{R}$ $\quad \lim_{x \to x_0} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$ $\quad \lim_{x \to x_0} g(x) = m \in \mathbb{R}$

allora $\lim_{x \to x_0} f(x) + g(x) = \ell + m$ $\quad (+)$

$\lim_{x \to x_0} f(x) \cdot g(x) = \ell \cdot m$ $\quad (\times)$

(Def) $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell \overset{def}{\Longleftrightarrow} \forall V$ intorno di ℓ $\exists U$ int. di x_0 t.c. $f(U \setminus \{x_0\}) \subset V$ $\quad (L)$

oss: È equivalente a chiedere che

$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell \Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0$ $\exists U$ intorno di x_0 t.c. $f(U \setminus \{x_0\}) \subset B_\varepsilon(\ell)$ $\quad (L')$

$(L) \Rightarrow (L')$ perché $B_\varepsilon(\ell)$ è un intorno di ℓ

$(L') \Rightarrow (L)$ perché ogni V intorno di ℓ contiene una palla $B_\varepsilon(\ell)$ per qualche $\varepsilon > 0$

[Dim Prop] $(+)$ fisso $\varepsilon > 0$

$$\begin{cases} \exists U_1 \text{ intorno di } x_0 : & f(U_1 \setminus \{x_0\}) \subset B_{\varepsilon/2}(\ell) \\ \exists U_2 \quad " \quad " \quad " : & g(U_2 \setminus \{x_0\}) \subset B_{\varepsilon/2}(m) \end{cases}$$

$U \doteq U_1 \cap U_2$ è ancora intorno di x_0

$x \in U \setminus \{x_0\} \Rightarrow \quad f(x) = \ell + r_1 \quad |r_1| < \varepsilon/2$
$\quad g(x) = m + r_2 \quad |r_2| < \varepsilon/2$ $\Big\} \Rightarrow f(x) + g(x) = \ell + m + \overbrace{r_1 + r_2}^{r}$ $\quad |r| < \varepsilon$

$$x \in U \setminus \{x_0\} \Longrightarrow \qquad f(x)+g(x) \in B_\varepsilon(\ell+m)$$

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0 \quad \exists U \ : \quad (f+g)(U \setminus \{x_0\}) \subset B_\varepsilon(\ell+m)}$$

Per il limite del prodotto,

$$\lim_{x\to x_0} f(x)g(x) = \ell \cdot m \iff \lim_{x\to x_0} |f(x)g(x) - \ell \cdot m| = 0$$

$$0 \leq |f(x)g(x) - \ell \cdot m| \leq |f(x)g(x) - \ell g(x)| + |\ell g(x) - \ell \cdot m|$$

$$\leq \underbrace{\underbrace{|f(x)-\ell|}_{\downarrow\, 0}\ \underbrace{|g(x)|}_{\substack{\downarrow \\ \text{è limitata} \\ \text{in un intorno} \\ \text{di } x_0}}}_{\downarrow\, 0} + \underbrace{|\ell| \cdot \underbrace{|g(x) - m|}_{\downarrow\, 0}}_{\downarrow\, 0} \qquad x \to x_0$$

Prodotto di funz. infinit. per funz. limitata è infinitesimo

$$\lim_{x\to x_0} |f(x)g(x) - \ell \cdot m| = 0$$

— o —

Oss: il risultato in questa forma appare anche il caso delle successioni

Una succ. $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è semplicemente una funz definita su $E=\mathbb{N}$

$$\mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$n \longmapsto a_n$$

$x_0 = +\infty$

gli intorni di ∞ sono gli insiemi che contengono una semiretta $[n_0, +\infty) \cap \mathbb{N}$

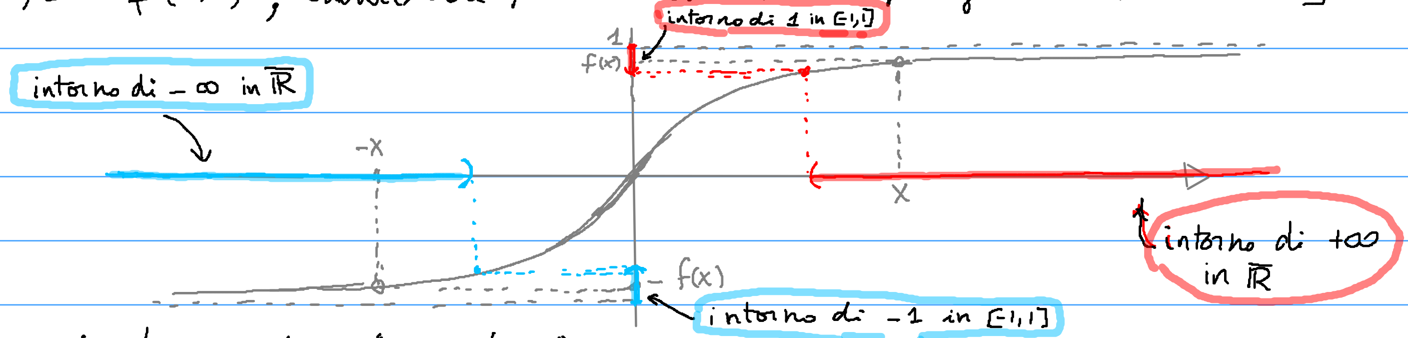
$\exists\ U$ intorno di ∞ tale che $|f(x)-\ell| < \varepsilon \quad \forall x \in U$ ⟵ formulazione generale

$\exists\ \bar{n}$ t.c. $|a_n - \ell| < \varepsilon \quad \forall n \geq \bar{n}$ ⟵ Forma particolare, nel caso delle successioni

Es: $\varphi(x) = \dfrac{x}{1+|x|}$ $\qquad \varphi : \mathbb{R} \xrightarrow{\sim} (-1,1)$

È continua, bigettiva, strett. crescente

[sugg: $f(x) = -f(-x)$; esaminare prima il caso $x>0$ e poi sfruttare la simmetria]



La topologia su $\overline{\mathbb{R}}$ è definita in modo da "rispecchiare" quella su $[-1,1]$

~~Se riscrivessimo~~ la dim del punto ⊕ vista sopra gli intorni U_1 e U_2 sarebbero

$U_1 = \{n \geq n_1\}$

$U_2 = \{n \geq n_2\}$

$U = U_1 \cap U_2 = \{ n \geq \max\{n_1, n_2\} \}$, [...]

LIMITI di SUCCESSIONI

TOOL KIT (Strumenti per il calcolo dei limiti)

(a) operaz. algebriche

(b) due carabinieri

(b') infinitesima × limitata è infinitesima

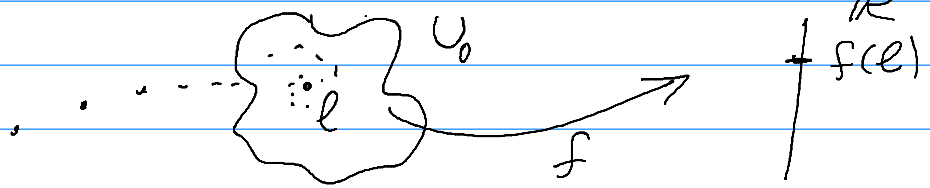
(C) composizione con funzioni continue

Formulazione di (C) nel caso delle successioni

(C) Se $\lim_{n\to+\infty} a_n = \ell$ e $f: U_0 \to \mathbb{R}$ U_0 int di ℓ, f continua in ℓ

$\Rightarrow \exists n_0$: $f(a_n)$ è ben definita $\forall n \geq n_0$

& $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(\ell)$



$\lim_{n\to\infty} a_n = \ell \implies \forall$ intorno U di ℓ $\exists \bar{n}$: $a_n \in U$ $\forall n \geq \bar{n}$

$\Rightarrow$ buona def di $f(a_n)$ per $n \geq \bar{n}$

$\xrightarrow{\text{teor. di comp}}$ $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(\ell)$

Esercizio: Se $f: \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ continua

$$\begin{cases} a_0 = \alpha \in \mathbb{R} \\ a_{n+1} = f(a_n) \end{cases}$$

Se $\lim_{n\to\infty} a_n = \ell \in \mathbb{R}$ allora $\boxed{\ell = f(\ell)}$

ℓ è un punto fisso per f

Limiti di Successioni; esempi

$a_n = \frac{1}{n}$ $\qquad \lim_{n\to\infty} a_n = 0$

E' vero $\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \;\not\Rightarrow\; \lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = +\infty$

no (vale solo se $a_n > 0$ definitivamente)

$a_n = \frac{(-1)^n}{n} \longrightarrow 0$ $\qquad \frac{1}{a_n} = (-1)^n n$ non converge

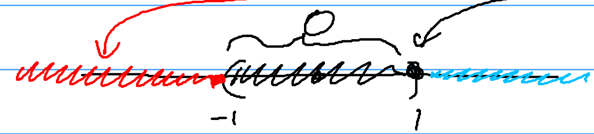
Infatti $a_{2n} \longrightarrow +\infty$ mentre $a_{2n+1} \longrightarrow -\infty$

—— o ——

$a_n = a^n$

$a \in \mathbb{R}$ fissato

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \begin{cases} 0 & \text{se } |a|<1 \\ +\infty & \text{se } a>1 \\ 1 & \text{se } a=1 \\ \text{non esiste} & \text{altrimenti} \end{cases}$$



Dim: $\boxed{a>1}$ $\quad a = 1+\delta$ con $\delta>0$

$$(1+\delta)^n \geq 1+n\delta \geq n\delta$$

Bernoulli

$n \to \infty$

$+\infty \qquad +\infty$

$\boxed{0<|a|<1}$

Il caso $a=0$ è banale e si tratta a parte

$$\lim_{n\to\infty} |a^n| = \lim_{n\to\infty} |a|^n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(1/|a|)^n} = 0$$

il denominatore $\to +\infty$ per il punto prec.

$0<|a|<1 \Rightarrow 1/|a| > 1$

Altri

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n^2} = ? \qquad a>1$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n} = ?$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!\,2^n}{n^n}$$

Prop: Se (a_n) (b_n) sono succ. a termini positivi (i.e. $a_n > 0 \ \forall n$, $b_n > 0 \ \forall n$)

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq \frac{b_{n+1}}{b_n} \quad \forall n \geq n_0 \qquad (*)$$

Allora $a_n \geq c\, b_n \quad \forall n \geq n_0$ $\left(\text{con } c = \frac{a_{n_0}}{b_{n_0}}\right)$

Dim $(*) \iff a_{n+1} b_n \geq b_{n+1} a_n \quad \forall n \geq n_0$

$$\Updownarrow$$

$$\frac{a_{n+1}}{b_{n+1}} \geq \frac{a_n}{b_n} \quad \forall n \geq n_0$$

posto $r_n \doteq \frac{a_n}{b_n}$ abbiamo $r_{n+1} \geq r_n \quad \forall n \geq n_0$

quindi $r_n \geq r_{n_0} \quad \forall n \geq n_0$

ovvero $\frac{a_n}{b_n} \geq \frac{a_{n_0}}{b_{n_0}} \quad \forall n \geq n_0$

$$a_n \geq c\, b_n \quad \forall n \geq n_0$$

Applicazione

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n^2} \qquad (a > 1)$$

Fissiamo b t.c. $1 < b < a$ (p.es. $b = \frac{a+1}{2}$)

poniamo $a_n \doteq b^n$ $b_n \doteq n^2$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = b > 1 \qquad \frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{(n+1)^2}{n^2} \longrightarrow 1$$

Quindi $\exists n_0$ t.c. $\frac{b_{n+1}}{b_n} < b \quad \forall n \geq n_0$

$$\Rightarrow a_n \geq c\, b_n \qquad \forall n \geq n_0$$

$$b^n \geq c\, n^2 \qquad \forall n \geq n_0$$

$$\frac{a^n}{n^2} = (a/b)^n \cdot \frac{b^n}{n^2} \geq (a/b)^n \cdot c \qquad \forall n \geq n_0$$

$$(a/b)^n \cdot c \xrightarrow{n \to \infty} +\infty \qquad (a/b) > 1$$

Pertanto per il th dei due* carabinieri, $\frac{a^n}{n^2} \longrightarrow +\infty$

* siamo nel caso in cui basta un carabiniere solo.

$\boxed{\text{5 nov 2021}}$

$\boxed{\text{Es per casa}}$

1) $a = 2020^{2021}$ $b = 2021^{2020}$

$\max\{a, b\} = ?$

2) Determinare sup & inf di $A := \{\sqrt[n]{n} : n \geq 2\}$

3) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[2n]{2^n + 3^n}$

Prop: Se $a_n > 0$, $b_n > 0$ $\forall n \geq n_0$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \overset{(\geq)}{\leq} \frac{b_{n+1}}{b_n} \quad \forall n \geq n_0 \implies$$

$$\exists C > 0 : a_n \overset{(\geq)}{\leq} C\, b_n$$

es.

---

a_n succ. data

b_n termine di paragone

$\hookrightarrow$ $b_n = b^n$ $\frac{b_{n+1}}{b_n} = b$

Cor: Se $a_n > 0$,

(i) se $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \leq b \quad \forall n \geq n_0$

$\exists C : \quad a_n \leq C \cdot b^n \quad \forall n \geq n_0$

(ii) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \ell$ allora

$\forall b > \ell \quad \exists n_0,\ \exists C$ t.c. $\boxed{a_n < C b^n \quad \forall n \geq n_0}$

oss: se $\ell < 1$ posso scegliere $b \in (\ell, 1)$

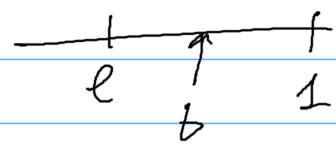
ottenendo che $a_n \to 0$ con velocità esponenz

Dim: (i) deriva da prop precedente con $b_n = b^n$

(ii) se $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \to \ell < b \Rightarrow \dfrac{a_{n+1}}{a_n} \in (-\infty, b)$ definit.

$\dfrac{a_{n+1}}{a_n} < b$ definitivamente (e si conclude con (i))

oss: basta prendere $b = \dfrac{\ell+1}{2}$



COR: Se $a_n > 0$,

(i) se $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq b \quad \forall n \geq n_0$

$\exists\, C>0: \quad a_n \geq C \cdot b^n \quad \forall n \geq n_0$

(ii) $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \ell$ allora

$\forall\, b < \ell \quad \exists\, n_0 \ \exists\, C$ t.c. $\boxed{a_n \geq C\, b^n \quad \forall n \geq n_0}$

oss: se $\ell > 1$ posso scegliere $b \in (1, \ell)$ ottenendo che $a_n \to +\infty$ con velocità esponenz

$\boxed{\text{Dim} \times \text{esercizio}}$

— o —

Es. $a_n = \binom{2n}{n} a^n$ con $a>0$ fissato

Discutere il comportamento di a_n al variare di $a>0$

(oss: $\binom{2n}{n} \leq (1+1)^{2n} = 4^n$)

$$a_n = \frac{(2n)!}{(n!)^2} a^n$$

$$(2n)! \neq 2(n!)$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(2n+2)!}{(n+1)!^2} a^{n+1} \cdot \frac{n!^2}{(2n)!\, a^n}$$

$a^{n+1} = a \cdot a^n$

$(2n+2)! = (2n+2)(2n+1)(2n)!$

$(n+1)! = (n+1) \cdot n!$

$$= a \frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2} = 2a \frac{2n+1}{n+1} \longrightarrow 4a$$

Per crit. del rapporto: $4a < 1$ (cioè $a < 1/4$) $\Rightarrow a_n \to 0$ per $n \to \infty$

$4a > 1$ (cioè $a > 1/4$) $\Rightarrow a_n \to +\infty$ //

$\nearrow a_n \searrow \quad a_n \to \ell = \inf_{\mathbb{N}} a_n \geq 0$

$\boxed{\text{e se } a = \frac{1}{4} \text{ ?}} \longleftarrow \boxed{\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2n+1}{2n+2} = 1 - \frac{1}{2n+2}} = 1 - \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$

Provo a confrontare a_n con $b_n = n^{-\alpha}$

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{(n+1)^{-\alpha}}{n^{-\alpha}} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-\alpha}$$

$$= 1 - \frac{\alpha}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

per $n \to \infty$

$$\begin{cases} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = 1 - \dfrac{1}{2n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right) \\[2ex] \dfrac{b_{n+1}}{b_n} = 1 - \dfrac{\alpha}{n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right) \end{cases}$$

per $n \to +\infty$

Se $0<\alpha<\frac{1}{2}$ allora $\boxed{\underbrace{\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{b_{n+1}}{b_n}}_{(*)} \text{ definitivamente } (A)}$

Infatti $(*) \iff \cancel{1}-\frac{1}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right) \leq \cancel{1}-\frac{\alpha}{n}+o(1/n) \iff 0 \leq \frac{1}{n}\left(\frac{1}{2}-\alpha\right)+o\left(\frac{1}{n}\right)$

$$\Updownarrow$$

$$0 \leq \frac{1}{n}\left(\underbrace{\frac{1}{2}-\alpha}_{\text{positivo}} + \underbrace{o(1)}_{\text{infinit}}\right)$$

$\exists\, n_0 : (*)$ è vera $\forall n \geq n_0$

$(A) \Rightarrow \exists\, C : 0 \leq a_n \leq C\, b_n = C\, n^{-\alpha}$ con $\alpha \in (0, 1/2)$ (p. es. $\alpha = 1/3$ va bene)

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

a_n

$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \nearrow e$ per $n \to +\infty$ $\qquad 2<e<3$

$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2} \longrightarrow +\infty$ $\qquad$ forma indeterm 1^∞

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2} \geq 1+n^2\cdot\frac{1}{n} \geq 1+n \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$$

↑ Bernoulli

$$\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$$

$$= \left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]^n \geq \left[1+\frac{1}{n}\cdot n\right]^n \geq 2^n \longrightarrow +\infty$$

$$1 \leq \left[\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^2}\right]^{1/n} < [e]^{1/n}$$

$a_n \doteq \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$

$[\ ] = a_{n^2}$

$a_n \nearrow \Rightarrow a_{n^2} \nearrow$

$\downarrow$ per i 2 carabin. 1 $\qquad$ $\xrightarrow{n\to\infty} 1$

$$(C) \quad \left(1+\frac{1}{x}\right)^x \longrightarrow e \quad \text{per } x \to +\infty \quad (x \in \mathbb{R})$$

$t \in \mathbb{R}$ fissato

$$\left(1+\frac{t}{n}\right)^n = \left[\left(1+\frac{t}{n}\right)^{n/t}\right]^t$$

definitivamente

$n \to \infty \quad 1+\frac{t}{n} \to 1$

$1+t/n > 0$ defini.

$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdots a}_{n \text{ volte}} \qquad n \in \mathbb{N}$

$\boxed{a^x \text{ con } x \in \mathbb{R} \text{ serve che } a > 0}$

$$(t>0) \quad \left(1+\frac{t}{n}\right)^{n/t} \xrightarrow[n\to\infty]{} e$$

uso la formula (C) con $x = n/t$

$$\varphi(x) = \left(1+\frac{1}{x}\right)^x \qquad \lim_{n\to\infty} \varphi\left(\frac{n}{t}\right) = \lim_{x\to+\infty} \varphi(x) = e$$

Quindi $\left(1+\frac{t}{n}\right)^n \longrightarrow e^t$ perché $x \longmapsto x^t$ è continua su $(0,+\infty)$

Lo stesso risultato vale per $t<0$ (per es.)

[Sugg: mostrare che $\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$ usando il cambio di variabile $t=-(x+1)$]

Da $\left(1+\frac{t}{n}\right)^n \longrightarrow e^t$ segue

$$e^t \geq 1+t$$

$\alpha > -1$

$(1+\alpha)^n \geq 1+n\alpha$

$\left(1+\frac{t}{n}\right)^n \geq 1+n\left(\frac{t}{n}\right) = 1+t$ Bernoulli

definitivamente

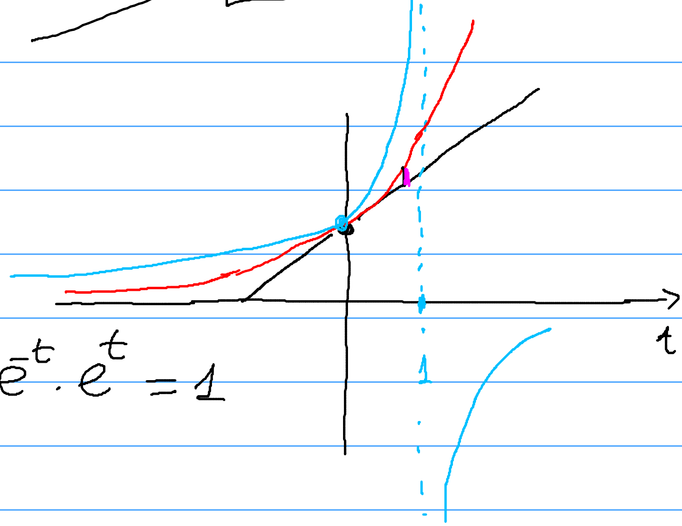
$$e^t \geq 1+t \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

$$e^{-t} \geq 1-t$$

$$\boxed{e^t \leq \frac{1}{1-t}}$$

$1-t>0$

$e^{-t}\cdot e^t = 1$



Proprietà di $\exp(x) = e^x$ $\qquad \exp : \mathbb{R} \longrightarrow (0, +\infty)$

(1) $e^{x+y} = e^x \cdot e^y$

(2) $e^x \geq 1 + x \quad \forall x \in \mathbb{R}$

(2') $e^x \leq \dfrac{1}{1-x} \quad \forall x < 1$

(3) e^x è strett. crescente (quindi inj)

(4) $\lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty \qquad \lim_{x \to -\infty} e^x = 0$

(5) exp è CONTINUA $\boxed{(\Rightarrow \text{surgettività su } (0,+\infty))}$

[es. $\forall a \in \mathbb{R}$ exp è L-lip su $(-\infty, a]$ con $L = e^a$]

(6) $\lim_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$ ovvero $e^x = 1 + x + o(x)$ per $x \to 0$

Dim: (1), (2), (2') e (4) già visti (sopra o a lezione)

se $x > x_0 \Rightarrow \underbrace{e^x - e^{x_0} = e^{x_0}(e^{x - x_0} - 1)}_{0} > 0$

(E) $\rightarrow$ $h \leq e^h - 1 \leq \dfrac{1}{1-h} - 1$ se h piccolo

$\downarrow \qquad \downarrow 0 \qquad \downarrow 0$ per $h \to 0$ $\qquad \lim_{h \to 0} e^h - 1 = 0$

$$\lim_{x\to x_0} e^x - e^{x_0} = \lim_{x\to x_0} e^{x_0}\,(\overbrace{e^{x-x_0}-1}^{\text{tende a zero}}) = 0$$

$\Rightarrow$ exp è continua

Riprendendo (F) ottengo

$$h \le e^h - 1 \le \frac{1}{1-h} - 1 = \frac{h}{1-h} \qquad (\text{con } |h|<1)$$

$$0 \le \underbrace{e^h - 1 - h}_{\omega(h)} \le \frac{h}{1-h} - h = \frac{h^2}{1-h}$$

$$e^h = 1 + h + \omega(h) \quad \text{con} \quad \omega(h) = o(h) \text{ per } h\to 0$$

infatti $\quad 0 \le \frac{\omega(h)}{h} \le \frac{h}{1-h}$ per $h\to 0$, con $0 \to 0$ e $\frac{h}{1-h} \to 0$

$$e^h = 1 + h + o(h)$$

$$e^h - 1 = h + o(h) \qquad \frac{e^h-1}{h} = 1 + \frac{o(h)}{h} \xrightarrow[h\to 0]{} 1$$

perché $\frac{o(h)}{h} \xrightarrow[h\to 0]{} 0$

$\exp : \mathbb{R} \xrightarrow{\sim} (0,+\infty)$ bigettiva $\Rightarrow$ esiste l'inverso

$\log \doteq \exp^{-1}$

inversa insiemistica

$$\log(e^x) = x \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$e^{\log t} = t \qquad \forall t \in (0,+\infty)$$

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R} \arrow[r, bend left, "\exp"] & (0,+\infty) \arrow[l, bend left, "\log"] \end{tikzcd}$$

<u>Proprietà</u>: $\log : (0,+\infty) \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}$

è strett. crescente

continua

$\log(1) = 0 \qquad \log t > 0 \iff t > 1$

$$\log(t \cdot s) = \log t + \log s$$

$$\log(t) \leq t - 1 \qquad \forall t > 0$$

— o —

$$\exp_a(x) := e^{x \cdot \log a} \qquad \exp_a(x) = a^x$$

9 nov 2021

2020^{2021} vs 2021^{2020}

$\boxed{n=0}$

$n^{n+1} > (n+1)^n$ per quali n è vera?

$\Updownarrow$

$n > \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ divido per n^n

$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 3$

$n \geq 3 \Rightarrow n \geq 3 > \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \Rightarrow n^{n+1} > (n+1)^n$

—o—

$A = \{ \underbrace{\sqrt[n]{n}}_{a_n} : n \geq 2 \}$ $\quad \sup A = ?$ $\quad \inf A = ?$

a_n è $\overset{\text{str}}{}$ decrescente per $n \geq n_0$

$\Updownarrow$ def

$\boxed{a_{n+1} < a_n \ \forall n \geq n_0} \iff (n+1)^{\frac{1}{n+1}} < n^{1/n} \iff (n+1)^n < n^{n+1}$

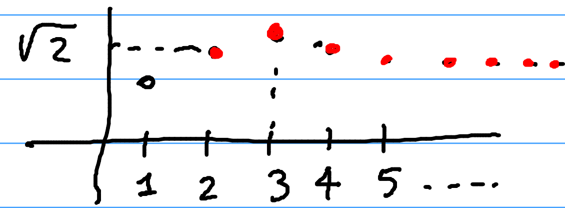
è vera per $n \geq 3$

n	$\sqrt[n]{n}$
1	1
2	$\sqrt{2}$
3	$\sqrt[3]{3}$
⋮	

$\sqrt{2} < \sqrt[3]{3}$

$\Updownarrow$

$8 < 9$



$\sup A = \sqrt[3]{3}$ $\quad \boxed{\inf A = \lim_{n\to\infty} a_n = 1}$ (*)

$$\sqrt[n]{n}$$
$$\shortparallel$$
$$\forall \delta > 0 \ \exists n_0 : \ a_n < 1+\delta \qquad \forall n \geq n_0$$
$$\Updownarrow$$
$$n < (1+\delta)^n \iff 1 < \frac{(1+\delta)^n}{n}$$

definitivam. vera perché $\frac{(1+\delta)^n}{n} \to +\infty$ $\forall \delta > 0$

$$\lim \sqrt[2n]{2^n + 3^n}$$

$$\sqrt[2n]{3^n} \leq \sqrt[2n]{2^n + 3^n} \leq \sqrt[2n]{2 \cdot 3^n}$$

$3^n = (\sqrt{3})^{2n}$

$$\sqrt{3} \leq \sqrt{3}\sqrt[2n]{\left(\frac{2}{3}\right)^n + 1} \leq \sqrt{3}\boxed{\sqrt[2n]{2}}$$

$$\downarrow \qquad\qquad \downarrow \qquad\qquad \downarrow$$

$$\sqrt{3} \qquad\qquad \sqrt{3} \qquad\qquad \sqrt{3}\cdot 1$$

$$\left(1 + \frac{t}{n}\right)^n \xrightarrow[n \to +\infty]{} e^t \qquad \forall t \in \mathbb{R}$$

$$\shortparallel$$

$$\left[\boxed{\left(1 + \frac{t}{n}\right)^{n/t}}\right]^t$$

$t > 0 \to \lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \qquad \left(x = \frac{n}{t}\right)$

$t < 0 \to \boxed{\lim\limits_{x \to -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x} \qquad \left(x = \frac{n}{t}\right)$

$$\boxed{x \longrightarrow -\infty}$$

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = \left(\frac{x+1}{x}\right)^{x} = \left(\frac{x}{x+1}\right)^{-x} = \left(1+\frac{1}{-(x+1)}\right)^{-x-1+1}$$

$y \doteq -(x+1)$

$$\lim_{y\to+\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^{y}\cdot\left(1+\frac{1}{y}\right) = e$$

— o —

$$\lim_{t\to+\infty} t\,e^{-t} = 0$$

$$\lim_{t\to+\infty} t^{\alpha} e^{-t} = 0 \qquad \alpha\le 0 \quad \alpha>0$$

$\alpha>0$ $\quad \left(t\,e^{-t/\alpha}\right)^{\alpha}$ $\qquad \lim_{t\to\infty} t\,e^{-t/\alpha} = 0$

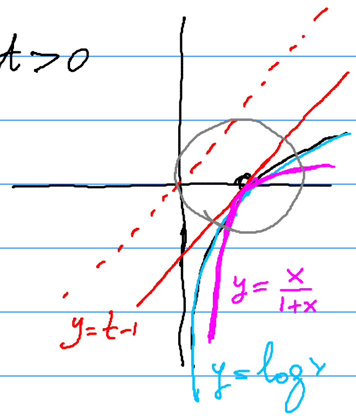
— o —

$$\log : (0,+\infty) \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}$$

(1) $\log(t\cdot s) = \log t + \log s$ $\qquad \boxed{\log t = -\log\frac{1}{t} \quad s=\frac{1}{t}}$

(2) $\log t \leq t-1 \quad \forall t>0$

$$\boxed{\log(1+\alpha) \leq \alpha \quad \forall\, \alpha>-1}$$



(1) $\begin{cases} t=e^{x} \\ s=e^{y} \end{cases}$ $\qquad e^{x+y} = e^{x}\cdot e^{y}$

$\Updownarrow$

$\begin{cases} x=\log t \\ y=\log s \end{cases}$ $\qquad \log e^{x+y} = \log(e^{x}\cdot e^{y})$

$$\log t+\log s = x+y = \log(t\cdot s)$$

(2) $e^x \geq 1+x$ $\qquad t = e^x \qquad x = \log t$

$t \geq 1 + \log t \qquad \log t \leq t-1$

—— o ——

$\log(1+\alpha) \leq \alpha \quad \forall \alpha > -1$

$$-\log(1+\alpha) = \log \frac{1}{1+\alpha} = \log\left(1 + \frac{1}{1+\alpha} - 1\right) = \log\left(1 - \frac{\alpha}{1+\alpha}\right) \leq -\frac{\alpha}{1+\alpha}$$

$$\frac{\alpha}{1+\alpha} \overset{(\circ)}{\leq} \log(1+\alpha) \left(\overset{(\circ\circ)}{\leq} \alpha\right)$$

log è strettamente crescente (perché inversa di una strett cresc)

e continua (è L-lip su $[\delta,+\infty)$ $\forall \delta > 0$ con $L = \frac{1}{\delta}$)

se $x, y \in [\delta, +\infty)$ SPG $x<y$

$$0 < \log y - \log x = \log\left(\frac{y}{x}\right) = \log\Big(1 + \underbrace{\frac{y}{x} - 1}_{\alpha}\Big) \overset{(\circ\circ)}{\leq} \frac{y-x}{x} < \frac{y-x}{\delta}$$

$$|\log y - \log x| \leq \frac{1}{\delta}|y-x| \quad \forall x,y \in [\delta,+\infty)$$

—— o ——

$$\lim_{x \to 0} \log x = -\infty \qquad \lim_{x\to+\infty} \log x = +\infty \quad (\text{xes})$$

usando la definiz. di limite

—— o ——

$$\boxed{(i)\ \lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x)}{x} = 1 \qquad (ii)\ \log(1+x) = x + o(x) \text{ per } x \to 0}$$

$$\frac{x}{1+x} - x \leq \log(1+x) - x \leq x - x = 0$$

$$-\frac{x^2}{1+x} \leq \underbrace{\log(1+x) - x}_{\omega(x)} \leq 0 \qquad (\forall x > -1)$$

$$\omega(x) = o(x) \qquad \text{per } x \to 0$$

$$\log(1+x) = x + \omega(x) = x + o(x) \qquad (ii)^*$$

$$\frac{\log(1+x)}{x} = \frac{x + o(x)}{x} = 1 + \frac{o(x)}{x} \xrightarrow[x\to 0]{} 1 \qquad (i)^*$$

—o—

$$\lim_{\boxed{x \to 0}} x \log x \qquad \text{cambio } t = -\log x, \quad x = e^{-t} \qquad \boxed{\begin{array}{l} x \to 0 \\ t \to +\infty \end{array}}$$

$$\parallel$$

$$\lim_{t\to+\infty} -e^{-t}\, t = 0$$

—o—

$$\lim_{x\to 0} x^\alpha \log x = 0 \qquad \forall \alpha > 0$$

$\boxed{x>0}$

$$x^\alpha \log x = \frac{1}{\alpha} x^\alpha \log x^\alpha \qquad x^\alpha = y \xrightarrow{\alpha>0} 0$$

$$\lim_{y\to 0} \frac{1}{\alpha} y \log y = 0$$

$$\lim_{x\to+\infty} x^{-\alpha} \log x = 0 \qquad \forall\, \alpha>0$$

$y = \frac{1}{x}$

$\boxed{\begin{matrix} a>0 \\ a\neq 1 \end{matrix}}$

$$a^x \doteq e^{x\log a} \quad ; \quad \log_a \text{ inversa di } a^x$$

$$\log_a x = \frac{\log x}{\log a}.$$

$$a^{\frac{\log x}{\log a}} = e^{\left(\frac{\log x}{\log a}\right)\cdot \log a} = e^{\log x} = x$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{a^x-1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^{x\log a}-1}{x\log a}\cdot \log a = \log a$$

$\boxed{\begin{matrix} a>0 \\ a\neq 1 \end{matrix}}$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{\log(1+x)}{\log a}}{x} = \frac{1}{\log a}$$

$$\lim_{x\to 0} x^x = \lim_{x\to 0} e^{x\log x} = 1 \qquad a^x = e^{x\log a}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^x-1}{x} = \lim_{x\to 0} \underbrace{\frac{e^{x\log x}-1}{x\log x}} \cdot \log x = -\infty$$

$$\frac{e^y-1}{y} \xrightarrow[y\to 0]{} 1$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^{\alpha\log(1+x)}-1}{x}$$

$$\frac{e^{\alpha\log(1+x)}-1}{\alpha\log(1+x)} \cdot \frac{\alpha\log(1+x)}{x} \xrightarrow[x\to 0]{} \alpha$$

$$\alpha\log(1+x) \to 0$$

—— o ——

$$H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

$H_1 = 1$

$H_2 = 1 + \frac{1}{2}$

$H_3 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}$

$H_n \nearrow$

$H_4 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \quad \dots$

$$\frac{x}{1+x} \le \log(1+x) \le x \qquad \forall x > -1$$

$x = \frac{1}{k} \quad k \in \mathbb{N}$

$$\frac{1}{k+1} \leq \log\left(1+\frac{1}{k}\right) \leq \frac{1}{k}$$

$$(A) \quad \log\left(1+\frac{1}{k}\right) = \log\left(\frac{k+1}{k}\right) = \log(k+1) - \log k$$

$$(T) \quad \sum_{k=1}^{n} \log\left(1+\frac{1}{k}\right) = \sum_{k=1}^{n} \left[\log(k+1) - \log k\right] \underset{(*)}{=} \log(n+1) - \log(1)$$

SERIE TELESCOPICA

$(*)$ Prop: $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (a_{k+1} - a_k) = a_{n+1} - a_1$ dim per induzione

$$H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \geq \sum_{k=1}^{n} \log\left(1+\frac{1}{k}\right) \overset{(A)}{=} \sum_{k=1}^{n} \log(k+1) - \log k \overset{(T)}{=} \log(n+1)$$

$$H_n \geq \log(n+1) \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$$

Prop: $\exists\, \gamma \in (0,1)$ tale che $H_n = \log n + \gamma + o(1)$ per $n \to +\infty$

Dim $\quad \gamma_n \doteq H_n - \log n$

$$\gamma_{n+1} < \gamma_n \iff \gamma_{n+1} - \gamma_n < 0 \iff \frac{1}{n+1} - \log(n+1) + \log n < 0$$

$$\Updownarrow$$

$$\frac{1}{n+1} < \log(n+1) - \log n$$

$$\frac{1}{n+1} \le \log\left(1+\frac{1}{n}\right) \quad \underline{\text{vera}}$$

γ_n è decrescente $\Rightarrow \gamma_n \le \gamma_1 = 1$

γ_n è positiva infatti:

$$\gamma_n \quad \underset{\uparrow}{H_n} - \log n$$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \log n \ge \log(n+1) - \log n > 0$$

<u>Es</u>: Verificare che $\gamma \doteq \inf_{n \in \mathbb{N}} \gamma_n > 0$

[Sugg: si ponga $\beta_n \doteq H_n - \log(n+1)$;
verificare che β_n è crescente, $\beta_n < \gamma_n \ \forall n$
$\lim_{n\to\infty} \beta_n = \lim_{n\to\infty} \gamma_n$ $\qquad \beta_1 = 1 - \log 2 > 0$]

12 nov 2021

$\boxed{\text{Ric Stud mart ore 16.30}}$

$$H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

$$\gamma(1)$$

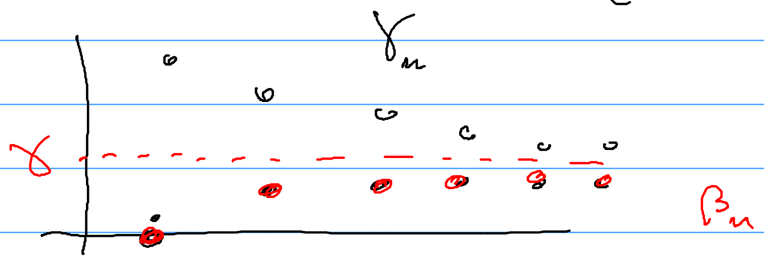
$$H_n \geq \log(n+1) \qquad \gamma_n = H_n - \log n \geq 0$$

γ_n è str. decrescente $\Rightarrow \gamma_n \longrightarrow \inf_{n\in\mathbb{N}} \gamma_n \doteq \gamma$

$$\boxed{\gamma > 0} \qquad \gamma \in [0,1)$$

Basta vedere che posto $\beta_n = H_n - \log(n+1)$ si ha β_n è strett. crescente

(oss: $\beta_n \longrightarrow \gamma$ $\qquad \gamma_n - \beta_n = \log(n+1) - \log n = \log\left(1+\frac{1}{n}\right) \to 0$



$$\gamma > \beta_1 = 1 - \log 2 > 0$$

——— o ———

$\gamma_n \searrow \gamma \qquad \underset{\displaystyle H_n - \log n}{\overset{\shortparallel}{\gamma_n}} = \gamma + o(1) \quad \text{per } n \to \infty$

$$\boxed{H_n = \log n + \gamma + o(1) \quad \text{per } n \to +\infty}$$

Applicazione: $\lim\limits_{n\to+\infty} \boxed{\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}} = \log 2$

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = ?$$

— o —

$$\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} = H_{2n} - H_n = \log(2n) + \cancel{\gamma} + o(1) - \log n - \cancel{\gamma} - o(1) \quad \text{per } n\to\infty$$

$$= \log\left(\frac{2\cancel{n}}{\cancel{n}}\right) + o(1)$$

$$= \log 2 + o(1) \qquad \text{per } n \to \infty$$

PROP: [SOMME TELESCOPICHE] $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ succ

$$\sum_{k=1}^{n} (a_{k+1} - a_k) = a_{n+1} - a_1 \qquad P(n)$$

Dim: Per induzione su n

$a_2 - a_1 + a_3 - a_2 + a_4 - a_3 \ldots$

$\boxed{n=1}$ $\quad a_2 - a_1 = a_2 - a_1$ $\boxed{\text{vera}}$

$\boxed{P(n-1) \Rightarrow P(n)}$

$$\sum_{k=1}^{n} (a_{k+1} - a_k) = \underbrace{\sum_{k=1}^{n-1} (a_{k+1} - a_k)}_{Hp} + (a_{n+1} - a_n)$$

$$= \cancel{a_n} - a_1 + a_{n+1} - \cancel{a_n} = a_{n+1} - a_1$$

Applicazioni

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = 1 - \frac{1}{n+1}$$

$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$ è superiormente limitata

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2} = 1 + \sum_{h=1}^{n-1} \frac{1}{(h+1)^2} \leq 1 + \sum_{h=1}^{n-1} \frac{1}{h(h+1)}$$

$k = h+1$

$$\leq 1 + 1 - \frac{1}{n}$$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \leq 2 \qquad \left[\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \xrightarrow[n \to \infty]{} \frac{\pi^2}{6} \right]$$

PROP $\exists\ \alpha \in \mathbb{R}$ tale che

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} = 2\sqrt{n} + \alpha + o(1) \quad \text{per } n \to \infty$$

Dim

$$a_n \doteq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n} \qquad a_1 = -1$$

a_n è decrescente infatti

$$a_n - a_{n+1} = -\frac{1}{\sqrt{n+1}} + 2\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)\frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{n+1}} + \boxed{\frac{2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}}$$

OSS
$$\boxed{\frac{1}{\sqrt{n+1}} \leq \frac{2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} < \frac{1}{\sqrt{n}}}$$

$$0 = \boxed{\frac{1}{\sqrt{n+1}}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}} \leq a_n - a_{n+1} \leq \boxed{\frac{1}{\sqrt{n}}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

$$0 \leq a_n - a_{n+1} \Rightarrow a_{n+1} \leq a_n$$

$$-a_k + a_{k+1} \geq -\frac{1}{\sqrt{k}} + \frac{1}{\sqrt{k+1}}$$

a_n è inf. limitata. Infatti

$$a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} (a_{k+1} - a_k) ,$$

$$\geq a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{k+1}} - \frac{1}{\sqrt{k}}$$

$$\geq a_1 + \frac{1}{\sqrt{n}} - 1$$

$$\geq -2 + \frac{1}{\sqrt{n}} \geq -2$$

$$a_n \searrow \alpha \geq -2$$

$$\Rightarrow \quad \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} = 2\sqrt{n} + \alpha + o(1) \qquad n \to \infty$$

—— o ——

$$z \in \mathbb{C} \qquad (z-1) \sum_{k=0}^{n} z^k = z^{n+1} - 1$$

Questa è una somma telescop

$$(z-1) \sum_{k=0}^{n} z^k = \sum_{k=0}^{n} (z^{k+1} - z^k) = z^{n+1} - z^0 = z^{n+1} - 1$$

$$A^{n+1} - B^{n+1} = (A-B) \sum_{k=0}^{n} A^k B^{n-k}$$

$$A^2 - B^2 = (A-B)(A+B)$$

$$A^3 - B^3 = (A-B)(A^2 + AB + B^2)$$

PROP: Se $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ succ. a val. complessi

(CESARO)

$$a_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell \implies \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$$

— o —

Dim: $\alpha_n \doteq a_n - \ell$ $\qquad a_n \to \ell \iff \boxed{\alpha_n \to 0}$

$$\boxed{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \longrightarrow 0} \implies \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(a_k - \ell) = \left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k\right) - \ell$$

$\downarrow \qquad\qquad \downarrow$

$0 \qquad\qquad 0$

— o —

$$\boxed{\alpha_n \to 0 \implies \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\alpha_k \longrightarrow 0} \qquad \implies \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k \to \ell$$

Fisso $\varepsilon > 0$ $\quad \exists\, \bar{n} :\ \forall k \geq \bar{n} \quad |\alpha_k| < \varepsilon$

$n > \bar{n}$
$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\alpha_k = \frac{1}{n}\underbrace{\boxed{\sum_{k=1}^{\bar{n}}\alpha_k}}_{M} + \frac{1}{n}\sum_{k=\bar{n}+1}^{n}\alpha_k$$

se $n > \frac{M}{\varepsilon}$

$\left(\frac{M}{n} < \varepsilon\right)$

$$\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\alpha_k\right| \leq \frac{|M|}{n} + \overbrace{\frac{1}{n}\sum_{k=\bar{n}+1}^{n}|\alpha_k|}^{\text{somma di } n-\bar{n} \text{ addendi} < \varepsilon}$$

$$< \frac{|M|}{n} + \varepsilon < 2\varepsilon$$

$\underline{\text{COR}}$: $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ succ positiva $(a_n > 0)$

Se $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \ell \;\underset{\not\Leftarrow}{\Longrightarrow}\; \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \ell$

Applic: (a) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\binom{2n}{n}} = 4$ (b) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{n^n}{n!}}$

(a) calcolo $\displaystyle\frac{\binom{2n+2}{n+1}}{\binom{2n}{n}} = \frac{(2n+2)(2n+1)\cancel{(2n)!}}{(n+1)^2\cancel{(n!)^2}} \cdot \frac{\cancel{(n!)^2}}{\cancel{(2n)!}}$

$\displaystyle = \frac{4n+2}{n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 4$

$\not\Leftarrow$ Potrebbe esistere $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n}$ ma non il limite del rapporto

$$a_n = \begin{cases} 2^n & n \text{ pari} \\ n2^n & n \text{ dispari} \end{cases}$$

se n pari

$\sqrt[n]{a_n} \longrightarrow 2$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \begin{cases} 2(n+1) & n \text{ pari} \\ \frac{2}{n} & n \text{ dispa} \end{cases}$$

Dim (Prop) $\quad \lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = \ell \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \ell$

$$\alpha_n \doteq \log a_n ; \qquad \log \sqrt[n]{a_n} = \frac{1}{n} \log a_n = \frac{1}{n} \alpha_n$$

$$\log \frac{a_{n+1}}{a_n} = \log a_{n+1} - \log a_n = \alpha_{n+1} - \alpha_n$$

$$\alpha_n = \alpha_0 + \sum_{k=0}^{n-1} (\alpha_{k+1} - \alpha_k)$$

$$\frac{1}{n} \alpha_n = \frac{1}{n} \alpha_0 + \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} (\alpha_{k+1} - \alpha_k) \xrightarrow[\text{CESARO}]{n\to\infty} 0 + \log \ell$$

$$\boxed{\alpha_{k+1} - \alpha_k = \log \frac{a_{k+1}}{a_k} \xrightarrow[k\to+\infty]{} \log \ell}$$

$$\text{Cioè} \quad \lim_{n\to+\infty} \underbrace{\frac{1}{n} \log a_n}_{\log \sqrt[n]{a_n}} = \log \ell \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = \ell$$

<u>ESERCIZIO</u> Mostrare che $(a_n > 0)$ in generale valg. le disug.ze

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \le \liminf_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} \le \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} \le \limsup_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

Es per casa

Determinare tutti i polinomi $p \in \mathbb{R}[x]$ tali che

$$1 - x^2 \leq p(x) \leq 1 + x^2 \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$f(x) = A + Bx$$

$$\begin{cases} x_0 = p \\ x_{n+1} = f(x_n) \end{cases}$$

scrivere esplicitamente x_n

$x_0 = p$

$x_1 = A + Bp$

$x_2 = A + BA + B^2 p$

$x_3 = A + BA + B^2 A + B^3 p$

CONGETTURA

$$\boxed{x_n = A \sum_{k=0}^{n-1} B^k + B^n p}$$

Dim per induzione

supposta vera a livello n

$$x_{n+1} = A + Bx_n = A\left(1 + \sum_{k=0}^{n-1} B^{k+1}\right) + B^{n+1} p$$

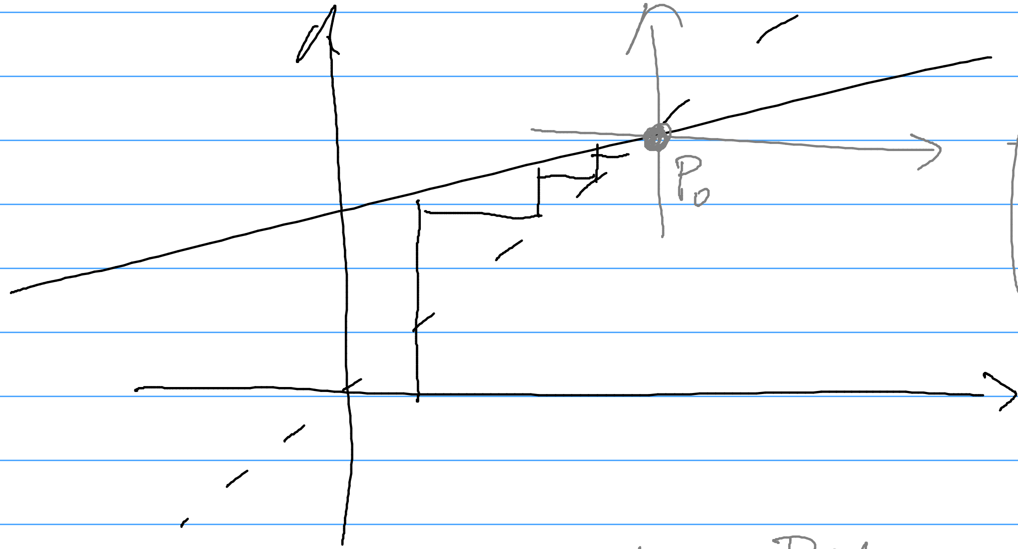
$$= A\left(\cancel{1} + \sum_{k=0}^{n} B^k\right) + B^{n+1} p$$

$$\sum_{k=0}^{n-1} B^k = \frac{B^n - 1}{B-1} \qquad \text{se } B \neq 1$$

e di conseguenza $\quad x_n = A\,\frac{B^n-1}{B-1} + B^n p \qquad B\neq 1$

$$x_n = nA + p \qquad B=1$$

o.



$y = Ax + B$

$y_n := x_n - P_0$

$A + BP_0 = P_0$

$y_{n+1} = B y_n$

19 nov 2021

ES. PER CASA

(1) $\limsup_{x \to x_0} f(x) + \liminf_{x \to x_0} g(x) \le \limsup_{x \to x_0} [f(x) + g(x)]$

[Sugg: $f(x) = (f(x) + g(x)) + (-g(x))$ e sfruttare la sub. addit. di limsup]

(2) Data (x_n) definita da $\begin{cases} x_0 = 0 \\ x_{n+1} = \sqrt{1 + x_n} \end{cases}$

(i) $\lim_{n \to +\infty} x_n = \ell \in \mathbb{R}$ e determinare ℓ

(ii) calcolare $\lim_{n \to \infty} n^2 (x_n - \ell)$

(3) $\boxed{\lim_{n \to \infty} \left(\frac{n^3 - n - 1}{n^3 - 5n + 1} \right)^n}$; $\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{\frac{n!}{n^n}}$

$$\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{2n^2 + 1}{2n^2 + n} \right)^n$$

$$\frac{2n^2+1}{2n^2+n} = \frac{2n^2+n}{2n^2+n} - \frac{1}{n}\left(\frac{n^2 - n}{2n^2+n}\right) = \underbrace{1 - \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)}_{1 + \frac{1}{n}\left(\frac{1}{2} + o(1)\right)} \quad \text{per } n \to +\infty$$

(pausa)

LEMMA: $\left(1+\frac{a}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)^n \xrightarrow[n\to\infty]{} e^a$

$$\left(1+\frac{a}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)^n = \exp\left(n\log\left(1+\frac{a}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right) = \exp(a+o(1)) \longrightarrow e^a$$

$$n\log\left(1+\overbrace{\frac{1}{n}(a+o(1))}^{x}\right) = n\left(\frac{1}{n}(a+o(1))\right)(1+o(1)) = a+\underbrace{o(1)+a\cdot o(1)+[o(1)]^2}$$

$$= a+o(1) \quad \text{per } n\to\infty$$

$$\log(1+x) = x+o(x) \quad \text{per } x\to 0$$

$$= x(1+o(1)) \quad \text{per } x\to 0$$

Ritornando al limite originario

$$\left(\frac{2n^2+1}{2n^2+n}\right)^n = \left(1-\frac{1}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)^n \xrightarrow[n\to\infty]{\text{per il lemma visto sopra}} \frac{1}{\sqrt{e}}$$

$$\lim_{x\to 0}(\cos x)^{1/x^2} = \lim_{x\to 0}\underbrace{\left(1-\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right)}^{1/x^2}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$$

$$1-\cos x = x^2\left(\frac{1}{2}+o(1)\right) \quad \text{per } x\to 0$$

$$\boxed{\cos x = 1-\frac{x^2}{2}+o(x^2) \quad \text{per } x\to 0}$$

$$\left(1-\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right)^{1/x^2} = \exp\left(\frac{1}{x^2}\log\left(1-\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right)\right)$$

$$= \exp\left(\frac{1}{x^2}\left[-\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right]\right)$$

$$= \exp\left(-\frac{1}{2}+o(1)\right) \longrightarrow e^{-1/2}=\frac{1}{\sqrt{e}}$$

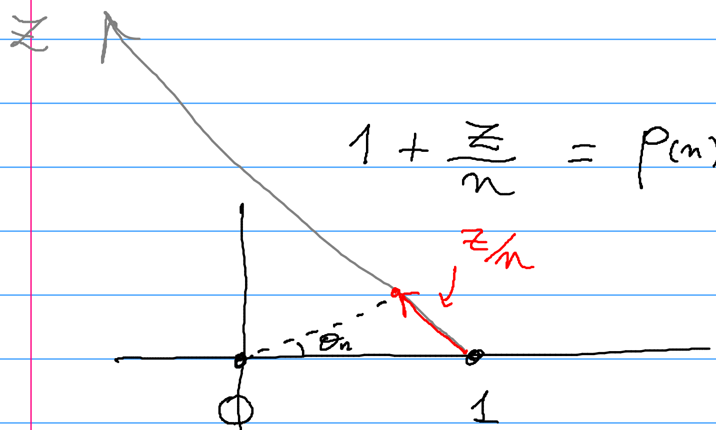
$$\left(1+\frac{z}{n}\right)^{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \overbrace{e^{\alpha}(\cos\beta+i\sin\beta)}^{e^{\alpha}\cdot e^{i\beta}}$$

con $z\in\mathbb{C}$, $\boxed{z=\alpha+i\beta}$

Oss/er: $w_n \longrightarrow w^*$ in $\mathbb{C}$ $\iff$ $\Big(\big((\rho_n\to 0)\ (\rho^*=0)\big) \vee \big(\rho_n\to\rho^* \ \&\ \vartheta_n\to\vartheta^*\big)\Big)$ a meno di multipli di 2π

$w_n=\rho_n e^{i\vartheta_n}$

$w^*=\rho^* e^{i\vartheta_*}$



$$1+\frac{z}{n} = \rho(n)\, e^{i\vartheta(n)}$$

per $n\gg 1$

$$\rho_n=\sqrt{\left(1+\frac{\alpha}{n}\right)^2+\left(\frac{\beta}{n}\right)^2} = \sqrt{1+\frac{2\alpha}{n}+o(1/n)}$$

$$\vartheta_n = \arctan\left(\frac{\mathrm{Im}\left(1+\frac{z}{n}\right)}{\mathrm{Re}\left(1+\frac{z}{n}\right)}\right)$$

$\left[\text{se } \mathrm{Re}\left(1+\frac{z}{n}\right)>0\right]$

$$\vartheta_n = \arctan\left(\frac{\beta/n}{1+\alpha/n}\right) = \arctan\left(\frac{\beta}{n}\cdot\frac{1}{1+\alpha/n}\right)$$

$$\boxed{\vartheta_n = \arctan\left(\frac{\beta}{n}\cdot(1+o(1))\right)}$$

$$\rho_n=\sqrt{1+\frac{2\alpha}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)}$$

$$\left(1+\frac{z}{n}\right)^n = \left(\rho(n) e^{i\theta(n)}\right)^n = \boxed{\rho(n)^n} \cdot e^{i \boxed{n\theta(n)}}$$

$$\bullet \quad (\rho(n))^n = \sqrt{\left(1+\frac{2\alpha}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)^n} \xrightarrow{n\to\infty} e^{\alpha}$$

$\omega(x_n) = o(1)$ per $n\to\infty$

$$\bullet \quad n\,\theta_n = n \arctan\Big(\overbrace{\frac{\beta}{n}\left(1+o(1)\right)}^{x_n}\Big) = \cancel{n}\left(\overbrace{\frac{\beta}{\cancel{n}}\left(1+o(1)\right)}\left(1+\underbrace{\omega(x_n)}\right)\right)$$

$n\to\infty$

$$= \beta\left(1+o(1)\right)\left(1+o(1)\right) = \beta\left(1+o(1)\right)$$

$(*)$ $\boxed{\arctan x = x + o(x) \quad \text{per } x\to 0 \\ = x\,(\underbrace{1+\omega(x)}) \quad \lim_{x\to 0}\omega(x)=0}$

uso lo sviluppo con $x = \frac{\beta}{n}(1+o(1)) \xrightarrow{n\to\infty} 0$

$$n\,\theta_n \longrightarrow \beta$$

Per il criterio visto sopra

$$\left(1+\frac{z}{n}\right)^n \xrightarrow[n\to\infty]{} e^{\alpha}\cdot e^{i\beta}$$

$(*)$ Per dimostrarlo basta verificare che $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\arctan x}{x} = 1$

y

basta porre $y := \arctan x$ $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\arctan x}{x} = \lim_{y\to 0}\frac{y}{\tan y} = 1$

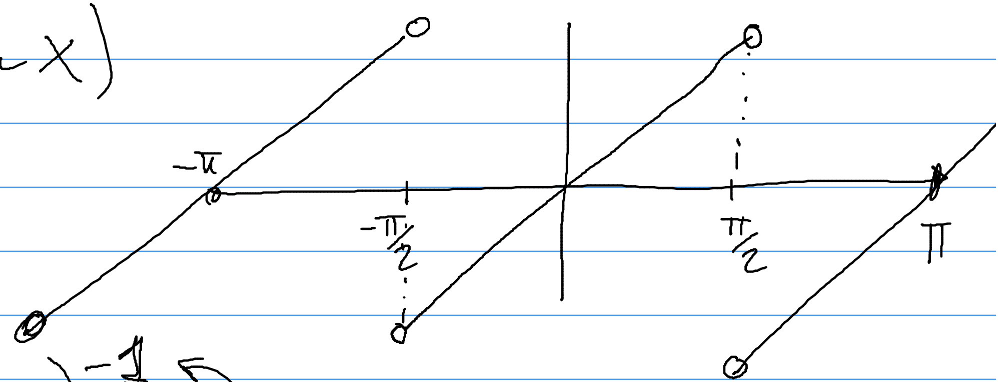
$x = \tan\arctan x$
$= \tan y$

$$\tan(\arctan x) = x$$

$$\arctan(\tan x) = x \qquad \text{solo se } x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

$$f(x) \doteq \arctan(\tan x)$$

$\tan$ è π-periodica

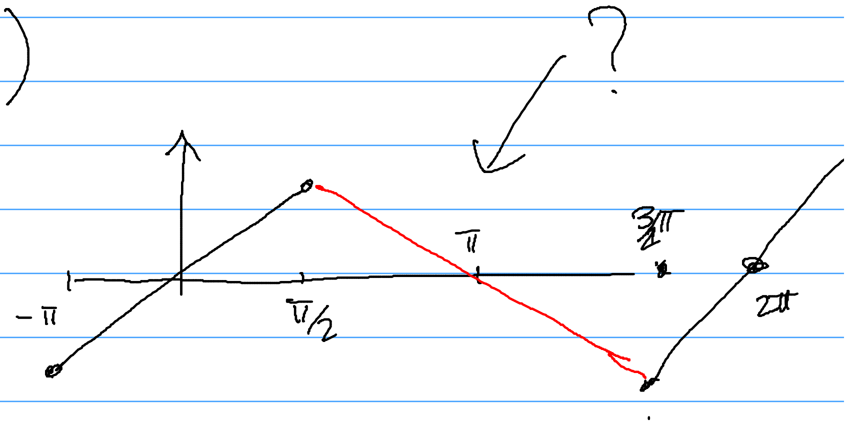


$$\arctan = \left(\tan\big|_{\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)} \right)^{-1}$$ ← inversa insiemistica

$$g(x) = \arcsin(\sin x)$$

g è 2π-periodica

$$\boxed{\sin(\pi + x) = -\sin x}$$



Es: Mostrare che $f(x) = 2x^3 + 3x - 3$ è bigettiva da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$

Dim: $\boxed{\text{inj}}$

$$\left.\begin{array}{l} x \longmapsto 2x^3 \text{ è strett. crescente} \\ x \longmapsto 3x-3 \text{ è strett. crescente} \end{array}\right\} \Longrightarrow f \text{ è strett. cresc.} \Downarrow \text{inj}$$

$\boxed{\text{surj}}$ Oss: se $P \in \mathbb{R}[x]$ gr(P) dispari $\Rightarrow$ Im$(P) = \mathbb{R}$

$p(x) = a x^{2m+1} + o(x^{2m+1})$ per $x \to +\infty$

(e anche per $x \to -\infty$)

$\boxed{\text{SPG } a>0}$

$$\lim_{x\to+\infty} P(x) = \lim_{x\to+\infty} a x^{2m+1} + o(x^{2m+1}) = \lim_{x\to\infty} \underbrace{x^{2m+1}}_{+\infty} (\underbrace{a+o(1)}_{a})$$

$= +\infty$

$$\lim_{x\to-\infty} P(x) = -\infty$$

Quindi se $y_0 \in \mathbb{R}$ $\exists\, b>0$ t.c. $p(b) > y_0$

$\exists\, a<0$ t.c. $p(a) < y_0$

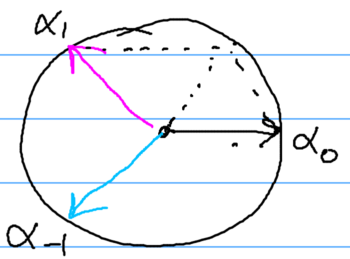
p continua su $[a,b] \Rightarrow$ Assume tutti i valori in $[p(a), p(b)] \ni y_0$

$\Rightarrow \exists\, x_0 \in [a,b] : p(x_0) = y_0$

Es: Mostrare che se $f:[0,1]\to[0,1]$ continua allora $\exists\ \alpha\in[0,1]$ t.c. $f(\alpha)=\alpha$

$$\sum_{k\in T}\binom{n}{k} = \circledast \qquad T \doteq 3\cdot\mathbb{Z} = \{k\in\mathbb{Z} : k=3h \text{ con } h\in\mathbb{Z}\}$$

$$\circledast = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\delta(k) = \frac{1}{3}\left(\bullet+\bullet+\bullet\right) \qquad \delta(k) \doteq \frac{1}{3}\Big(\underset{\alpha_0}{1} + \big(\underset{\alpha_1}{e^{\frac{2\pi i}{3}}}\big)^k + \big(\underset{\alpha_{-1}}{e^{-\frac{2\pi i}{3}}}\big)^k\Big)$$



$$\bullet\ \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} = (1+1)^n = \boxed{2^n}$$

$$z^3-1=0$$
$$\parallel$$
$$(z-\alpha_0)(z-\alpha_1)(z-\alpha_{-1})$$

$$\bullet\ \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(e^{\frac{2\pi i}{3}}\right)^k = \Big(\overbrace{1+e^{\frac{2\pi i}{3}}}^{1+\alpha_1}\Big)^n$$

$$= (-\alpha_{-1})^n = \left(e^{i\pi}e^{-\frac{2\pi i}{3}}\right)^n = \boxed{e^{i\frac{\pi}{3}n}}$$

$$\bullet\ \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(e^{-\frac{2\pi i}{3}}\right)^k = \boxed{e^{-i\frac{\pi}{3}n}}$$

$$(*) = \frac{1}{3}\left[2^n + e^{i\frac{\pi}{3}n} + e^{-i\pi/3\, n}\right]$$

$$= \frac{1}{3}\left[2^n + 2\cos\left(\frac{\pi}{3}n\right)\right]$$

###

26 nov 2021

$$\limsup_{x\to x_0} f(x) + \liminf_{x\to x_0} g(x) \le \limsup_{x\to x_0}\left[f(x)+g(x)\right]$$

$$f(x) = \left[f(x)+g(x)\right] + \left(-g(x)\right)$$

$$\limsup_{x\to x_0} f(x) \le \limsup_{x\to x_0}\left[f(x)+g(x)\right] + \overbrace{\limsup_{x\to x_0}\left(-g(x)\right)}^{-\liminf_{x\to x_0} g(x)}$$

da cui la tesi

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2-n-1}{n^2-5n+2}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{4}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)^n = e^4$$

$$\frac{n^2-n-1}{n^2-5n+2} = 1 + \frac{1}{n}\cdot\frac{4n^2-3n}{n^2-5n+2} = 1+\frac{4}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{n!}{n^n}} = \frac{1}{e}$$

$a_n>0$

se $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \ell$

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = \ell$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\cancel{(n+1)}\,\cancel{n!}}{\cancel{(n+1)}(n+1)^n}\cdot\frac{n^n}{\cancel{n!}} = \frac{n^n}{(n+1)^n} = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \to \frac{1}{e}$$

$$a_n = \frac{n!}{n^n}$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n!}} \geq \sum_{1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n^n}} = \sum_{1}^{+\infty} \frac{1}{n} = +\infty$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^\alpha}{\sqrt[n]{n!}}$$

a_n

Per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ questa serie converge?

$\alpha = 0$ non conv.

$\alpha > 0$ non conv

$\alpha < 0$ converge

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n!}{n^n}} = \frac{1}{e} \Rightarrow \sqrt[n]{n!} \sim \frac{n}{e}$$

$$a_n \sim \frac{e}{n^{1-\alpha}}$$

armonica generalizz $e \cdot \frac{1}{n^\beta}$

$\beta = 1-\alpha$

converge $\forall \beta > 1$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n^2}$$

converge per crit. del rapporto.

$$\sqrt[n]{\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n^2}} = \left(1-\frac{1}{n}\right)^n \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{e} < 1$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\log n}{n^3} \longleftarrow \text{converge per confronto con } \frac{1}{n^2}$$

$$\frac{\log n}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

$$0 \leq \frac{\log n}{n^3} = \frac{1}{n^2} \cdot \frac{\log n}{n} \leq c \frac{1}{n^2} \qquad 0 \leq \frac{\log n}{n} \leq C$$

$$\sum_{n=1} \frac{\log n}{n^\alpha} \qquad \text{per quali } \alpha \text{ converge?}$$

R: $\forall \alpha > 1$

se $\alpha = 1 + 2\delta$ con $\delta > 0$

$$\frac{\log n}{n^{1+2\delta}} = \frac{1}{n^{1+\delta}} \cdot \frac{\log n}{n^\delta} \leq \frac{1}{n^{1+\delta}} \cdot C$$

$$\frac{\log n}{n^\delta} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

$$\Downarrow$$

$$\exists c > 0 : \frac{\log n}{n^\alpha} \leq c$$

— o —

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^{\sqrt{n}}}{2^n}$$

$$\sqrt[n]{\frac{n^{\sqrt{n}}}{2^n}} = \frac{n^{1/\sqrt{n}}}{2} = \frac{e^{\frac{\log n}{\sqrt{n}}}}{2} \to \frac{1}{2}$$

$\Rightarrow$ la serie converge.

— o —

$$\sum_{p \text{ primo}} \frac{1}{p} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{11} + \frac{1}{13} + \frac{1}{17} + \cdots$$

CONVERGE O DIVERGE?

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \text{ diverge}$$

$$\sum_{\substack{n \text{ cubo} \\ \text{di un} \\ \text{naturale}}} \frac{1}{\sqrt{n}} = 1 + \frac{1}{\sqrt{8}} + \frac{1}{\sqrt{27}} + \dots$$

$$\| \quad \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{k^3}} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^{3/2}} \quad \text{converge}$$

—— o ——

$$\sum_{n \in S} \frac{1}{n}$$

$S = \{ n \in \mathbb{N} :$ la cifra 0 non compare nello sviluppo decimale di $n \}$

$S_k = \{ n \in S : n$ ha k cifre $\}$

$$\sum_{n \in S} \frac{1}{n} = \left(\sum_{n \in S_1} \frac{1}{n} + \sum_{n \in S_2} \frac{1}{n} + \dots \right)$$

Idea: procedere come nella dim del CRIT. CONDENSAZ.

$$0 \leq \sum_{n \in S_k} \frac{1}{n} \leq \frac{9^k}{10^k} \cdot 10$$

$|S_1| = 9$

$|S_2| = 9^2$

$|S_k| = 9^k$

$n \in S_1 \qquad \frac{1}{n} < 1$

$n \in S_2 \qquad \frac{1}{n} < \frac{1}{10}$

$n \in S_3 \qquad 1/n < 1/100$

$$\sum_{n\in S}\frac{1}{n}=\sum_{k=1}^{+\infty}\sum_{n\in S_k}\frac{1}{n}\le 10\sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{9}{10}\right)^k$$

$$\le 10\,\frac{9}{10-9}=90$$

---o---

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left[\sqrt[n]{n}-1\right]^{\alpha}$$

$\frac{1}{n}\log n \xrightarrow{n\to\infty} 0$

$e^x-1\sim x$, $x\to 0$

$$\left[\sqrt[n]{n}-1\right]^{\alpha}=\left[e^{\frac{1}{n}\log n}-1\right]^{\alpha}\underset{n\to\infty}{\sim}\left[\frac{1}{n}\log n\right]^{\alpha}$$

$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}\log n \text{ diverge}}$

Se $\alpha\le 1$ la serie diverge

$\alpha>1$ converge sempre

$\frac{\delta}{1+2\delta}>0$

$\alpha=1+2\delta$

$$0\le\frac{(\log n)^{1+2\delta}}{n^{1+2\delta}}=\frac{1}{n^{1+\delta}}\cdot\underbrace{\left[\frac{\log n}{n^{\delta/1+2\delta}}\right]^{1+2\delta}}=\frac{1}{n^{1+\delta}}\cdot O(1)$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{1+x^{2n}}$$

per quali $x \in [0,+\infty)$ converge

serie converge $\leftarrow$ $x>1$ $\quad x^n \to +\infty$

serie diverge $\leftarrow$ $\boxed{x=1 \quad x^n = 1}$

serie converge $\leftarrow$ $0 \le x < 1$ $\quad x^n \to 0$

$$0 \le \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{1+x^{2n}} \le \sum_{n=0}^{+\infty} x^n \leftarrow \text{converge}$$

$x^n \to +\infty$

$$x>1 \quad \frac{x^n}{1+x^{2n}} = \frac{1}{x^n} \cdot \frac{x^{2n}}{1+x^{2n}} \sim \frac{1}{x^n}$$

$\nearrow 1$

$\boxed{\sum \frac{1}{x^n} \text{ conv. se } x>1}$

$\boxed{\alpha > 0}$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} -\log \cos\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$$

{ conv. per $\alpha > 1/2$
{ diverge altrim.

$\log \cos x \sim$ $\quad x \to 0$

$$\log \cos x = \log(1 + \underbrace{\cos x - 1}_{y \to 0}) \sim \cos x - 1 \underset{x \to 0}{\sim} -\frac{x^2}{2}$$

$$-\log \cos\left(\frac{1}{n^\alpha}\right) \underset{n \to \infty}{\sim} \frac{\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)^2}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n^{2\alpha}}$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4^n}{\binom{2n}{n}}$$

diverge perché non è verificato il crit. necessario

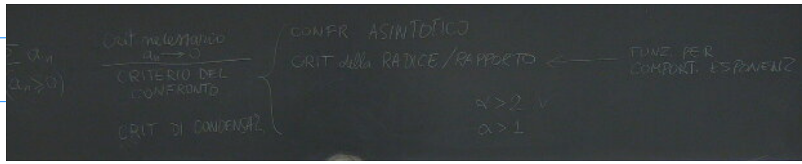
$$\binom{2n}{n} \leq (1+1)^{2n} = 4^n$$

$$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\binom{2n}{n}}{4^n} \qquad \text{esercizio}^*}$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3^n}{\binom{2n}{n}} \qquad a_n = \frac{3^n}{\binom{2n}{n}} = \frac{3^n (n!)^2}{(2n)!}$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{3^{\cancel{n}+1} (n+1)^2 \cancel{(n!)^2}}{(2n+2)(2n+1)\cancel{(2n)!}} \cdot \frac{\cancel{(2n)!}}{\cancel{3^n} \cancel{(n!)^2}} = \frac{\overbrace{3(n+1)^2}^{3n^2}}{\underbrace{(2n+2)(2n+1)}_{4n^2}} \to \frac{3}{4}$$

La serie converge



3 dic 2021

Esercizi per casa

- Calcolare $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^2-1}$

- Sia a_n definita da $\begin{cases} a_0 = 1 \\ a_{n+1} = \log(1+a_n^2) \end{cases}$

  (a) $\lim_{n\to+\infty} a_n = ?$ (b) Calcolare RdCV di $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$

- $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \quad n^{-1/n}$

- $\sum \frac{(-1)^n}{n \log^\alpha n}$ Dire per quali α
  - la serie conv.
  - " " conv. assolut.

Serie armonica a segni alterni

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \qquad \text{conv. per Leibnitz}$$

$$A(n) \doteq \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = \sum_{\substack{1 \le k \le n \\ \cancel{k \text{ disp}}}} \frac{1}{k} - \boxed{2 \sum_{\substack{1 \le k \le n \\ k \text{ pari}}} \frac{1}{k}}$$

$$H(\cancel{x}) \doteq \sum_{1 \le k \le \cancel{x}} \frac{1}{k} = \log \cancel{x} + \gamma + o(1) \quad \text{per } \cancel{x} \to +\infty$$

$$n \doteq \lfloor x \rfloor \qquad H(x) = H(n) \qquad 0 \le \log x - \log n < \log n+1 - \log n < \frac{1}{n}$$

$$n \le x < n+1$$

$$2 \sum_{\substack{1 \le k \le n \\ k \text{ pari}}} \frac{1}{k} \overset{k=2h}{=} \cancel{2} \sum_{1 \le h \le \frac{n}{2}} \frac{1}{\cancel{2}h} = H\left(\frac{n}{2}\right)$$

$$A(n) = H(n) - H\left(\frac{n}{2}\right) = \log n + \gamma + o(1) - \left(\log \frac{n}{2} + \gamma + o(1)\right)$$

$$= \log \cancel{n} \cdot \frac{2}{\cancel{n}} + o(1) = \log 2 + o(1) \longrightarrow \log 2$$

CALCOLARE (Per Casa)
LA SERIE

$$1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{6} + \dots = ?$$

(*) $\sum \frac{\sqrt{2^n+3^n}}{(n+1)^2} z^n$ per quali $z \in \mathbb{C}$ converge

Serie di potenze centrata in 0 $\left(\sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n \right)$

$L = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|}$ Raggio di Conv (RdCv)

$R = \frac{1}{L}$

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{\sqrt{2^n+3^n}}{(n+1)^2}} = \lim_{n\to\infty} \underbrace{(n+1)^{-2/n}}_{\downarrow\, 1} \cdot \underbrace{\sqrt[2n]{2^n+3^n}}_{\downarrow\, \sqrt{3}} = \sqrt{3}$$

$3^n \leq 2^n+3^n \leq 2\cdot 3^n$

$\sqrt[2n]{3^n} \leq \sqrt[2n]{2^n+3^n} \leq \sqrt[2n]{2\cdot 3^n}$

$R = \frac{1}{\sqrt{3}}$

La serie (*) converge $|z| < \frac{1}{\sqrt{3}}$

non conv. $|z| > \frac{1}{\sqrt{3}}$

$\boxed{\text{Se } |z| = 1/\sqrt{3}}$ $|c_n z^n| = \frac{1}{(n+1)^2} \cdot \sqrt{2^n+3^n}\, \frac{1}{\sqrt{3}^n} = \frac{1}{(n+1)^2} \sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^n + 1} \sim \frac{1}{(n+1)^2}$

$\sum |c_n z^n|$ converge per il crit. confr. asintotico $\Rightarrow$ anche $\sum c_n z^n$ converge

$$(S)\quad \sum_{n=1}^{+\infty} \overbrace{(-1)^n \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)}^{x_n}$$

$x_n \to 0$? sì

$\boxed{(S) \text{ è assolutam. conv. ? } \sum |x_n| < +\infty \text{ ?}}$

NO

$|x_n| = \sin\frac{1}{\sqrt{n}} \sim \frac{1}{\sqrt{n}}$

$\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$ non converge

$\boxed{\text{Posso applicare Leibnitz ?}}$

$x_n = (-1)^n a_n$ con $a_n \to 0$

$a_n = \sin\frac{1}{\sqrt{n}}$ $\quad$ $\sqrt{n}$ cresc.

$\Downarrow$

$1/\sqrt{n}$ decr. $\in [0,1]$

$\sin x$ è cresc. su $[0,1]$

$\Rightarrow a_n$ è decrescente

sì

$\Downarrow$

$\sum (-1)^n \sin\frac{1}{\sqrt{n}}$ converge semplicemente (ma non assolut.) per Leibnitz

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \overbrace{\frac{(-1)^n n + \sqrt{n}}{\sqrt{n^3}}}^{x_n}$$ dire se converge

$$x_n = (-1)^n \overbrace{\frac{n + (-1)^n \sqrt{n}}{\sqrt{n^3}}}^{a_n}$$

$a_n \to 0$

Metodo 1

~~Per Leibnitz la serie converge~~ NO

Metodo 2

$$x_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \Big(1 + \underbrace{\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}}_{o(1)} \Big) \sim \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$$ ← converge

~~Quindi per il criterio del confronto asintotico converge~~ anche la serie di partenza NO

serve che $x_n \geq 0$

1

$$x_n = \frac{(-1)^n n + \sqrt{n}}{\sqrt{n^3}} = \left(\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right) + \frac{1}{n}$$

$$S_N = \sum_{n=1}^{N} x_n = \sum_{n=1}^{N} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + H(n) \xrightarrow{n\to\infty} +\infty$$

La $\sum x_n$ diverge positivamente

$$\sum_{n=1}^{+\infty} 2^n z^{n!}$$ per quali $z \in \mathbb{C}$ converge

SERIE DI POTENZE <u>LACUNARIA</u>

Studio la conv. di

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \underbrace{2^n |z|^{n!}}_{a_n(z)}$$ (al variare di $z \in \mathbb{C}$)

usando il crit. del rapporto

$\sum c_k z^k$ con $c_k \doteq \begin{cases} 0 & \text{se } k \neq n! \text{ con } n \in \mathbb{N} \\ 2^n & \text{se } k = n! \text{ con } n \in \mathbb{N} \end{cases}$

$\limsup\limits_{k\to+\infty} \sqrt[k]{|c_k|} = ?$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2^{n+1} |z|^{[(n+1)\cdot n!]}}{2^n |z|^{n!}} = \underbrace{2\,|z|^{n(n!)}}\longrightarrow \begin{cases} 0 & \text{se } |z|<1 \\ +\infty & \text{se } |z|>1 \end{cases}$$

La serie converge se $|z|<1$ e non conv se $|z|>1$

$|z| = 1$? La serie non converge

$$\underbrace{\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{n \log n}{1+n^2}}_{x_n}$$

$x_n \to 0 \quad n \to \infty$ ✓

$\sum |x_n|$ converge? $\quad |x_n| \sim \frac{\log n}{n}$

NO

Posso usare Leibnitz

$a_n = \frac{n \log n}{1+n^2} \qquad a_n \to 0$ sí

a_n decrescente definitivamente $(\forall n \geq n_0)$

$\xRightarrow{\text{Leibnitz}}$ La serie converge

$\frac{x \log x}{1+x^2}$

$a_{n+1} < a_n \iff \frac{(n+1)\log(n+1)}{1+(n+1)^2} < \frac{n \log n}{1+n^2}$

$\Updownarrow$

$$\underbrace{\frac{(n+1)(1+n^2)}{n\,(1+(n+1)^2)}}_{r_n} < \underbrace{\frac{\log n}{\log(n+1)}}_{s_n} < 1$$

$$r_n = \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{1}{n^2}\right)}{\left(\frac{1}{n^2}+\left(1+\frac{1}{n}\right)^2\right)} = \frac{1+\frac{1}{n}+O(1/n^2)}{1+\frac{2}{n}+O(1/n^2)} = 1-\frac{1}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

$$s_n = \frac{\log n}{\log(n+1)} = 1 - \frac{-\log n + \log(n+1)}{\log(n+1)} = 1 - \frac{\log(1+1/n)}{\log n+1} = 1 - \frac{1}{n\log n} + o\left(\frac{1}{n\log n}\right)$$

$$1-r_n \sim \frac{1}{n} \qquad 1-s_n \sim \frac{1}{n\log n}$$

definitivamente $\dfrac{1}{n\log n} < \dfrac{1}{n}$

$$1-r_n > 1-s_n \quad \forall n \geq n_0 \implies \boxed{r_n < s_n \ \forall n \geq n_0}$$

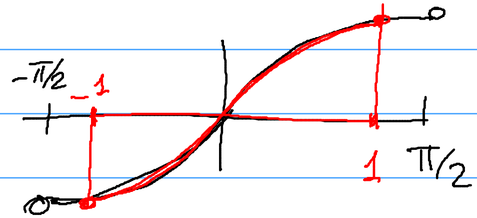
$$\begin{cases} x_0 = 1 \\ x_{n+1} = -\sin x_n \end{cases}$$

$\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = ?$; $\sum x_n$ converge?

$\sum x_n$ converge assolutamente?

<u>Oss</u>: x_n è definita $\forall n$

$|x_n| \leq 1 \quad \forall n$



$f(x) = \sin|x|$
$g(x) = |\sin x|$

sono funz. diverse ma coincidono su $[-1,1]$

perché $|x_n| \le 1$

$a_n = |x_n|$

$a_{n+1} = |x_{n+1}| = |-\sin x_n| = |\sin x_n| = \sin|x_n|$
$= \sin a_n$

$$\begin{cases} a_0 = 1 \\ a_{n+1} = \sin a_n \end{cases} \Rightarrow a_n \text{ def. } \forall n$$

$0 \le a_n \le 1$

$\sin x < x \Rightarrow a_{n+1} = \sin a_n < a_n$ $\quad$ a_n decrescente

$\lim_{n\to\infty} a_n = \ell \ge 0$ $\quad$ $\ell = 0$ perché 0 è l'unica soluzione di $\ell = \sin \ell$ su $[0,1]$

Per induzione si mostra che
$x_n = (-1)^n a_n$ $\quad$ e quindi possiamo concludere

che $\sum x_n$ converge per il criterio di Leibniz

[Sugg: $\sum x_n$ non conv. assolut. perché $\sum a_n$ non conv.

$\boxed{a_n \ge \frac{c}{n} \text{ per qualche valore di } c}$]

$\boxed{\text{9 dic 2021}}$

Comunicazioni: Primo compitino $\longrightarrow$ ven 17 dic

———o———

Es per casa: (1) Sia $f(x) = \begin{cases} 0 & x = 0 \\ x + x^2 \sin\left(\frac{1}{x^2}\right) & x \neq 0 \end{cases}$

(a) Verificare che f è derivabile $\forall x \in \mathbb{R}$

(b) Mostrare che $f'(0) = 1$ ma f non è crescente in alcun intorno dell'origine

(2) Dire per quali $a, b \in \mathbb{R}$ la funzione

$$g(x) = \begin{cases} ax + b & x \leq 0 \\ \log\left(\frac{3+x}{1+2x}\right) & x > 0 \end{cases}$$

è derivabile su $\mathbb{R}$

Def: $A \subseteq \mathbb{R}$, $f : A \to \mathbb{R}$

x_0 è un pto di MASSIMO RELATIVO (LOCALE) di f su $A \overset{def}{\iff} \exists \delta > 0 : f(x_0) \geq f(x) \quad \forall x \in A \cap B_\delta(x_0)$

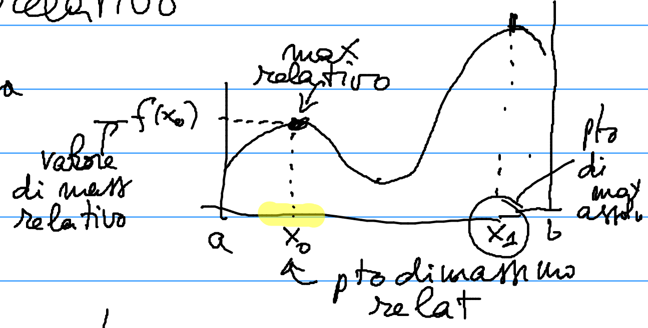
x_0 è un pto di MINIMO RELATIVO (LOCALE) di f su $A \iff \exists \delta > 0 : f(x_0) \leq f(x) \quad \forall x \in A \cap B_\delta(x_0)$

———o———

c.f. x_0 è pto di MASSIMO ASSOLUTO (o GLOBALE) di f su $A \iff f(x_0) \geq f(x) \quad \forall x \in A$

x_0 pto di max assoluto $\Longrightarrow$ x_0 pto di max relativo

(ma non è vero il viceversa



Teo: [CRITERIO di FERMAT]

$f: A \to \mathbb{R}$
$x_0 \in \operatorname{int}(A)$ [punto INTERNO]
x_0 pto di massimo relativo per f su A
f derivabile in x_0

$\Longrightarrow f'(x_0) = 0$

Oss: Non vale il viceversa ($\Longleftarrow$).

$f(x) = x^3$
$f'(x) = 3x^2 \qquad f'(0) = 0$
ma $x_0 = 0$ non è pto né di max relativo né di min

spg x_0 min relativo

Dim: x_0 pto interno $\Longrightarrow \exists\, \delta_1 > 0 : B_{\delta_1}(x_0) \subset A$

x_0 min relativo $\Longrightarrow \exists\, \delta_1 > \delta > 0 \qquad f(x_0) \leq f(x) \quad \forall x \in B_\delta(x_0)$

$\boxed{\text{se } x \in B_\delta(x_0)}$

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \begin{cases} \geq 0 & \text{se } x > x_0 \\ \leq 0 & \text{se } x < x_0 \end{cases}$$

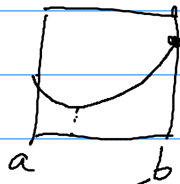
numeratore ≥ 0

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0 \qquad f'(x_0) = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0,$$

$$0 \le f'(x_0) \le 0 \implies f'(x_0) = 0$$

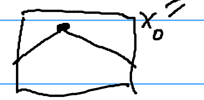
— o —

$f:[a,b] \to \mathbb{R}$ continua $\xRightarrow{W}$ f ammette massimo e minimo



(i) il pto max potrebbe coincidere con gli estremi ($x_0 \in \{a,b\}$)

(ii) il pto max potrebbe essere interno $x_0 \in (a,b)$ ma f non derivabile in x_0



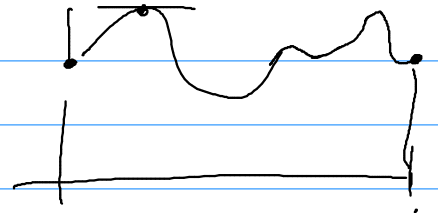
(iii) $\left.\begin{array}{l}\text{il pto max è interno,}\\ \text{e } f \text{ derivabile in } x_0\end{array}\right\} \implies f'(x_0) = 0$

Es: $f(x) = \dfrac{\log x}{x}$ $\quad (x > 0)$

Determinare inf e sup di f e dire se sono massimi e minimi

TEOREMA di ROLLE

$$\left.\begin{array}{l} f : [a,b] \to \mathbb{R} \\ f \text{ continua su } [a,b] \\ f \text{ derivabile su } (a,b) \\ \ell := f(a) = f(b) \end{array}\right\} \Longrightarrow \exists\, \xi \in (a,b) : f'(\xi) = 0$$



f continua $\overset{W}{\Longrightarrow}$ f ammette massimo e minimo

$$\max_{x\in[a,b]} f(x) \geq \ell \geq \min_{x\in[a,b]} f(x)$$

[caso A] $\max f = \min f \Longrightarrow f(x) = \ell \quad \forall x \in [a,b] \Longrightarrow f'(x) = 0 \quad \forall x\in[a,b]$

[caso B] $\max f \neq \min f \Longrightarrow$ almeno uno dei due è diverso da ℓ (spg il max)

$$\exists\, \xi \in [a,b] \quad f(\xi) = \max_{x\in[a,b]} f(x) > \ell \Longrightarrow \xi \notin \{a,b\} \Longrightarrow \xi \in (a,b)$$

per il teorema precedente $\Longrightarrow$

$$f'(\xi) = 0$$

TEOR di DARBOUX

$$\left.\begin{array}{l} f:[a,b]\longrightarrow \mathbb{R} \\ \text{continua e derivabile su}[a,b] \\ f'(a)<0 \quad \& \quad f'(b)>0 \end{array}\right\} \Longrightarrow \exists\, \xi\in[a,b]:\ f'(\xi)=0$$

Dim: Per Weierstrass f ammette massimo e minimo

E il punto di minimo ξ deve essere INTERNO

$$\xi\in(a,b)$$

b non può essere pto di minimo locale

$$\frac{f(b)-f(x)}{b-x} \xrightarrow{x\to b^-} f'(b)>0$$

Quindi $\dfrac{f(b)-f(x)}{b-x}>0$ in un intorno sinistro di b $(b-\delta,b)$

$\Longrightarrow$ $f(b)-f(x)>0$ $\forall x\in(b-\delta,b)$ $\Longrightarrow$

$f(b)>f(x)$ $\forall x\in(b-\delta,b)$ $\Longrightarrow$ $f(b)$ non è pto di minimo

Con un ragionam. analogo segue: $f(a)$ non è pto di min.

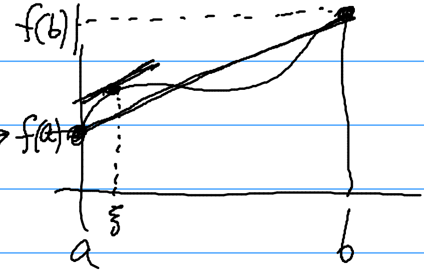
$$\Longrightarrow \xi\in(a,b) \Longrightarrow f'(\xi)=0$$

COR: f' manda intervalli in intervalli (per esercizio)

TEOREMA DI LAGRANGE

$$\left.\begin{array}{l} f:[a,b]\longrightarrow \mathbb{R} \\ f \text{ continua su } [a,b] \\ f \text{ derivabile su } (a,b) \end{array}\right\} \exists\, \xi\in(a,b):\ f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

interpret geom



Dim: $\quad h(x)=f(x)-\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$

- h è cont. su $[a,b]$
- h è derivabile in (a,b)

$$h'(x)=f'(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

$$h(a)=f(a)$$

$$h(b)=f(b)-\frac{f(b)-f(a)}{\cancel{b-a}}\cancel{(b-a)}=\cancel{f(b)}-\cancel{f(b)}+f(a)$$
$$=f(a)$$

- $h(b)=h(a)$

Posso applicare ad h il th di Rolle

$$\Longrightarrow \exists\,\xi\in(a,b) \qquad 0=h'(\xi)=f'(\xi)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

cioé $\qquad f'(\xi)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$

COR: Se $I \subseteq \mathbb{R}$ INTERVALLO, $f: I \to \mathbb{R}$ continua
f derivabile in $\mathrm{int}(I)$

(i) se $f'(x) \leq 0 \quad \forall x \in \mathrm{int}(I) \Rightarrow f$ è deb decrescente

(ii) se $f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathrm{int}(I) \Rightarrow f$ è deb crescente

(iii) se $f'(x) = 0 \quad \forall x \in \mathrm{int}(I) \Rightarrow f$ è costante

— o —

OSS: serve che I sia un intervallo

$f(x) = \frac{1}{x} \qquad f'(x) = -\frac{1}{x^2} < 0 \qquad f(-1) = -1 < f(1) = 1$

f non è decrescente su $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ ma è decrescente su $(-\infty, 0)$ e su $(0, +\infty)$

Dim [(i)] Se $\boxed{a, b \in I \text{ con } a < b}$ allora $[a,b] \subset I$

Applico Lagrange $\exists\, \xi \in (a,b)$ $\quad \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\xi) \leq 0$

Pertanto visto che $b - a > 0$ $\quad f(b) - f(a) \leq 0 \qquad \boxed{f(b) \leq f(a)}$

[(ii)] identica (x esercizio)

[(iii)] Se vale (iii) $\Rightarrow$ Vale sia (i) che (ii)
$\Rightarrow f$ è sia deb. crescente che deb decrescente $\Rightarrow f$ costante

Es. di applicazione

$n \longmapsto a_n = \frac{n \log n}{1+n^2}$ è decrescente $(n \in \mathbb{N})$ $\forall n \geq n_0$

$\varphi(x) = \frac{x \cdot \log x}{1+x^2}$ è decrescente su $[a, +\infty)$

$a_n = \varphi(n)$ per verificare la decrescenza di a_n $\forall n \geq n_0$ basta verificare la decrescenza di φ su una semiretta positiva

$$\varphi'(x) = \frac{(\log x+1)(1+x^2) - x\log x\,(2x)}{(1+x^2)^2} = \frac{N(x)}{D(x)} \qquad \left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - f \cdot g'}{g^2}$$

$D(x) > 0$

$$N(x) = \log x + 1 + \boxed{\cancel{x^2 \log x}} + x^2 - \boxed{\cancel{2}}\,x^2 \log x$$

$$= -x^2 \log x + o(x^2 \log x) \quad \text{per } x \longrightarrow +\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} N(x) = -\infty \Longrightarrow N(x) < 0 \text{ su una semiretta positiva } [a, +\infty)$$

$$\Longrightarrow \varphi \text{ decrescente su } [a, +\infty)$$

— o —

Es: Studiare la funzione $f(x) = \arctan x + \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$

TEOR di CAUCHY

$$\left.\begin{array}{l} f, g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R} \\ f, g \text{ continue su } [a,b] \\ f, g \text{ derivabili su } (a,b) \end{array}\right\} \Rightarrow \exists\, \xi \in (a,b) \text{ tale che}$$

$$[f(b) - f(a)]\, g'(\xi) = [g(b) - g(a)]\, f'(\xi)$$

COR: se nelle stesse ipotesi assumiamo anche che $g'(x) \neq 0$ su (a,b) $\Rightarrow$

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

OSS: se pongo $g(x) = x$ riottengo Lagrange

Dim: $h(x) \doteq [f(b) - f(a)]\, g(x) - [g(b) - g(a)]\, f(x)$

h è continua su $[a,b]$

h è derivabile su (a,b)

e $h'(x) = [f(b) - f(a)]\, g'(x) - [g(b) - g(a)]\, f'(x)$

h soddisfa le ipotesi di Rolle

$$h(a) = [f(b) - \cancel{f(a)}]\, g(a) - [g(b) - \cancel{g(a)}]\, f(a) = f(b)\, g(a) - g(b)\, f(a)$$

$$h(b) = [\cancel{f(b)} - f(a)]\, g(b) - [\cancel{g(b)} - g(a)]\, f(b) = -f(a)\, g(b) + g(a)\, f(b)$$

$$h(b) = h(a)$$

$\Rightarrow \exists\, \xi : \; h'(\xi) = 0 \quad \Rightarrow [f(b) - f(a)]\, g'(\xi) = [g(b) - g(a)]\, f'(\xi)$

Esempio/esercizio: f derivabile in un intorno di 0

$f(0) = 0$

$f'(x) = o(x^n)$ per $x \to 0$ $(n \geq 1)$

Allora $f(x) = o(x^{n+1})$ per $x \to 0$

[Sugg: usare Cauchy con $g(x) = x^{n+1}$

— o —

Sia $f : I \to \mathbb{R}$ derivabile su $I \leftarrow$ intervallo

$|f'(x)| \leq M \quad \forall x \in I$

$$\Longrightarrow \quad |f(x) - f(y)| \leq M|x-y| \quad \forall x, y \in I$$

cioè f è M-Lip

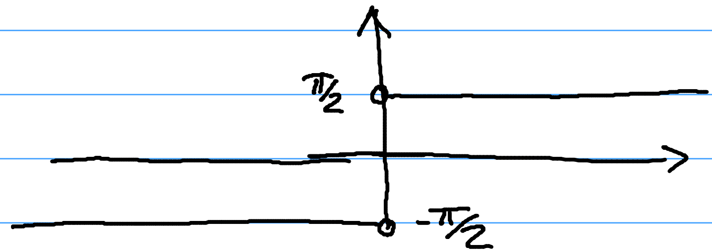
$\boxed{\text{10 dic 2021}}$

$$f(x) = \arctan x + \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right)$$

$$= \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2} = 0 \implies f = \text{cost}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \arctan x + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}$$



$$\arctan x + \arctan \frac{1}{x} = \begin{cases} \pi/2 & x > 0 \\ -\pi/2 & x < 0 \end{cases}$$

— o —

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \underbrace{\frac{1}{n^2-1}}_{a_n} = ?$$

$$\frac{1}{n^2-1} = \frac{1}{(n+1)(n-1)} = \left[\frac{1}{(n+1)} - \frac{1}{(n-1)}\right]\left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$= \left[\underbrace{\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}} + \underbrace{\frac{1}{n} - \frac{1}{n-1}}\right] \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$\sum_{2}^{N} a_n = -\frac{1}{2}\left[\sum_{2}^{N}\left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}\right) + \sum_{2}^{N}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n-1}\right)\right]$$

$$= -\frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{N+1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{N} - 1\right)\right] \xrightarrow{N\to\infty} \frac{3}{4}$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \, n^{-1/n}$$

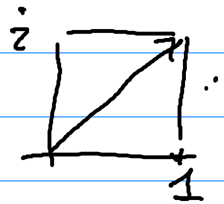
$$\lim_{n\to\infty} \left|(-1)^n n^{-1/n}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = 1$$

addendo non infinitesimo $\Longrightarrow$ la serie non conv

— o —

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \underbrace{\boxed{\frac{\log n}{n} (1+i)^n}}_{c_n} \, z^n \qquad z \in \mathbb{C}$$

Q1: RdCV



Q2: Comportamento al bordo

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|} \qquad |c_n| = \frac{\log n}{n} |1+i|^n = \frac{\log n}{n} 2^{n/2}$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{\log n}{n}} \sqrt{2} = \sqrt{2} \qquad \boxed{R = \frac{\sqrt{2}}{2}}$$

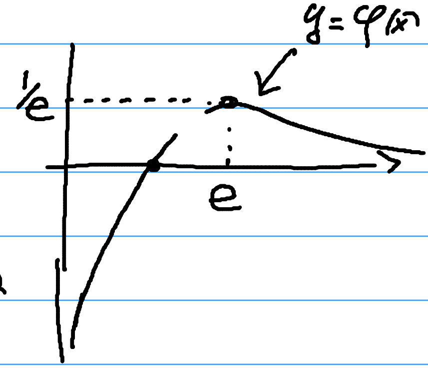
Se $z \in \partial B_R(0) \Longrightarrow z = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{i\vartheta}$

$$c_n z^n = \frac{\log n}{n} \cdot \underbrace{(1+i)^n \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n e^{in\theta}}_{b_n}$$

$\boxed{\text{OSS: Se } |z| = R \text{ la serie non è assolut. conv. } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\log n}{n}}$

$\varphi(x) \doteq \dfrac{\log x}{x}$ $\qquad \varphi'(x) = \dfrac{1-\log x}{x^2} < 0$

per $x > e$



$n \longmapsto \dfrac{\log n}{n}$ è decrescente per $n \geq 3$

$\Rightarrow \dfrac{\log n}{n}$ è a variaz. limitata $\longrightarrow 0$

Per utilizzare Dirichlet devo verificare che

$b_n = (1+i)^n \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n e^{in\theta}$ è a somma limitata

$= e^{i\pi/4 n} \cdot e^{i\theta n}$ $\qquad 1+i = \sqrt{2}\cdot e^{i\pi/4}$

$= e^{i(\pi/4+\theta)n}$

Per quali valori di θ $\qquad B_N \doteq \sum_{n=1}^{N} e^{i(\pi/4+\theta)n}$ è limitata

$\theta \neq -\frac{\pi}{4}$

Se $\theta \neq -\frac{\pi}{4} \Rightarrow B_N = e^{i(\frac{\pi}{4}+\theta)} \cdot \dfrac{1-e^{i(\frac{\pi}{4}+\theta)(N-1)}}{1-e^{i(\pi/4+\theta)}}$

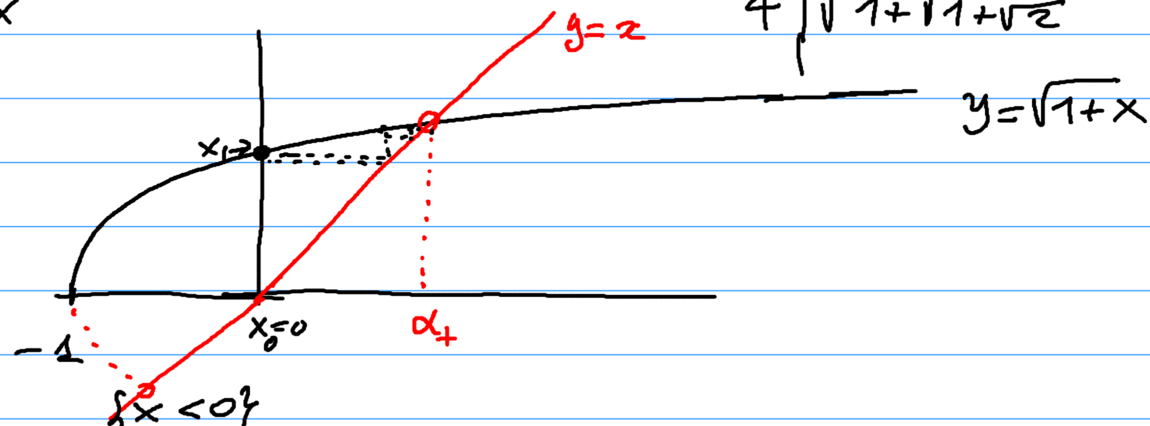
$|B_N| \leq \dfrac{2}{|1-e^{i(\pi/4+\theta)}|}$ è limitata uniformemente in N

Se $\theta = -\pi/4$ l'addendo della serie è esattamente $\dfrac{\log n}{n} \Rightarrow$ La serie diverge

$$\begin{cases} x_0 = 0 \\ x_{n+1} = \sqrt{1+x_n} \end{cases} \qquad \begin{cases} x_0 = 0 \\ x_{n+1} = f(x_n) \end{cases}$$

n	x_n
0	0
1	1
2	$\sqrt{2}$
3	$\sqrt{1+\sqrt{2}}$
4	$\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{2}}}$

$$f(x) = \sqrt{1+x}$$



$$\sqrt{1+x} > x \iff \{x<0\} \vee \{x>0 \wedge 1+x > x^2\}$$

$$x^2 - x - 1 = 0$$

$$\alpha_\pm = \frac{1 \pm \sqrt{1+4}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$$\boxed{a = b \quad \underset{\not\Leftarrow}{\Longrightarrow} \quad a^2 = b^2}$$

$$\sqrt{1+x} \geq x \quad \text{se} \quad x \in [-1, \alpha_+]$$

$$f([-1, \alpha_+]) = [0, \alpha_+] \subset [-1, \alpha_+]$$

$x_0 \in [-1, \alpha_+] \Longrightarrow x_n \in [-1, \alpha_+] \ \forall n \in \mathbb{N}$ per induzione

$f(x) \geq x \quad$ se $\quad x \in [-1, \alpha_+]$

$\Rightarrow \quad x_{n+1} = f(x_n) > x_n \quad \Rightarrow x_n$ crescente

$x_n \longrightarrow \ell \leq \alpha_+$

per $n \to \infty$

$\Rightarrow \quad \ell = f(\ell) \quad \Rightarrow \ell = \alpha_+$

$\boxed{f(\alpha_+) = \alpha_+}$

$\lim_{n\to\infty} x_n = \alpha_+$

$\lim_{n\to+\infty} n^2 (\underbrace{x_n - \alpha_+}_{-\varepsilon_n}) = ?$

$\varepsilon_n \doteq \alpha_+ - x_n > 0$

$x_n \longrightarrow \alpha_+$

$$\frac{\varepsilon_{n+1}}{\varepsilon_n} = \frac{f(\alpha_+) - f(x_n)}{\alpha_+ - x_n} \longrightarrow \lim_{x\to\alpha^+} \frac{f(\alpha_+) - f(x)}{\alpha_+ - x} = f'(\alpha_+)$$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+1}}$$

$$0 < f'(\alpha^+) < 1$$

Quindi ε_n converge a zero con velocità esponenz.

$$\lim_{n\to+\infty} -n^2 \varepsilon_n = 0$$

Q3: Quanto vale RdCv di $\sum_{n=0}^{+\infty} \varepsilon_n z^n$?

$$R = \frac{1}{f'(\alpha_+)}$$

c'è conv anche in $\boxed{|z|=R \ \& \ z \neq R}$ (Dirichlet)

$z = R$ boh! $\rightsquigarrow$ (assoluta conv.)

$$\overbrace{1+\frac{1}{3}}-\frac{1}{2}+\overbrace{\frac{1}{5}+\frac{1}{7}}-\frac{1}{4}+\dots$$

Riordinamento di $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k}$

$\oplus$ $\overbrace{1,\ \frac{1}{3}},\ \overbrace{\frac{1}{5},\ \frac{1}{7}},\ \frac{1}{9},\ \dots$

$\ominus$ $\frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{6},\ \frac{1}{8},\ \frac{1}{10},\ \dots$

Più in generale

Suppongo di sommare $p(n)$ addendi positivi
$q(n)$ addendi negativi con $p(n)+q(n)=n$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{p(n)}{n}=\alpha\in\mathbb{R} \qquad \left(\text{nel caso sopra } \alpha=\frac{2}{3}\right)$$

$$S_n=\sum_{\substack{k \text{ disp}\\ k\le 2p(n)}}\frac{1}{k}-\sum_{\substack{k \text{ pari}\\ k\le 2q(n)}}\frac{1}{k}$$

$$H(x)\doteq\sum_{1\le k\le x}\frac{1}{k}=\log x+\gamma+o(1) \quad \text{per } x\to+\infty$$

$$\sum_{\substack{k \text{ pari}\\ k\le 2q(n)}}\frac{1}{k}=\sum_{h\le q(n)}\frac{1}{2h}=\frac{1}{2}H(q(n))=\frac{1}{2}\log q_n+\frac{\gamma}{2}+o(1)$$

$$\sum_{\substack{k \text{ disp}\\ k\le 2p(n)}}\frac{1}{k}=H(2p_n)-\sum_{\substack{k \text{ pari}\\ k\le 2q(n)}}\frac{1}{k}=\log(2p_n)+\cancel{\gamma}+o(1)-\left[\frac{1}{2}\log p_n+\frac{\gamma}{2}+o(1)\right]$$

$$=\frac{1}{2}\log p_n+\frac{\gamma}{2}+\log 2+o(1)$$

$$S_n = \frac{1}{2}\left(\log p_n - \log q_n\right) + \log 2 + o(1)$$

$$= \frac{1}{2}\log\frac{p_n/n}{q_n/n} + \log 2 + o(1) \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{2}\log\frac{\alpha}{1-\alpha} + \log 2$$

Nel caso da cui siamo partiti $\alpha = \frac{2}{3}$ e il limite $\frac{1}{2}\log\frac{2/3}{1/3} + \log 2 = \frac{3}{2}\log 2$

Es: Mostrare che $f(\alpha) = \log\frac{\alpha}{1-\alpha}$ si ha $f((0,1)) = \mathbb{R}$

$$e^{-x} = \frac{x}{n} \qquad (E) \qquad (n \in \mathbb{N}_*)$$

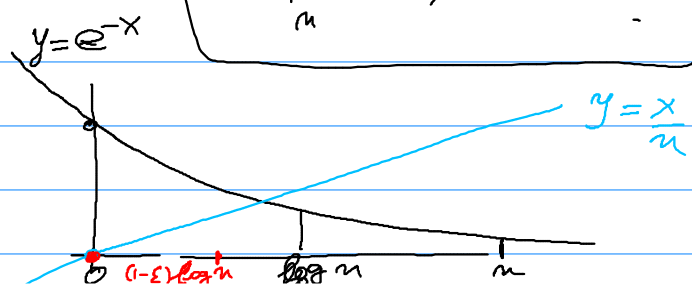
(a) Mostrare che (E) ha un'unica soluzione $\alpha(n)$

(b) Mostrare che $\alpha_n \sim \log n$ per $n \to \infty$

$$\varphi_n(x) = e^{-x} - \frac{x}{n} \qquad \boxed{\varphi_n(\alpha_n) = 0\ ?}$$

$\varphi_n(0) = 1 > 0$

$\varphi_n(n) = e^{-n} - 1 < 0$ $\quad (\forall n \geq 1)$



φ_n è continua

$\varphi_n(0) > 0$
$\varphi_n(n) < 0$ $\Longrightarrow$ $\exists\, \alpha_n \in [0, n]$ $\quad \varphi_n(\alpha_n) = 0$

φ_n è somma di due funz. stett. decrescenti

$\Longrightarrow$ è str. decresc.

—o—

$$\boxed{-x = \log x - \log n}$$

$x + \log x = \log n$

$\alpha_n + \log \alpha_n = \log n$

[...]

$$\varphi_n(\log n) = e^{-\log n} - \frac{\log n}{n} = \frac{1 - \log n}{n} < 0$$

se $n > e$

$\Longrightarrow \quad \alpha_n \in [1, \log n]$ se $n > e$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\alpha_n}{\log n} = 1$$

$\alpha_n \le \log n$

$\frac{\alpha_n}{\log n} \le 1$

$\forall \varepsilon > 0$

$\frac{\alpha_n}{\log n} > 1 - \varepsilon$ definitivamente $\longrightarrow$ $\alpha_n > (1-\varepsilon)\log n$

$$\varphi_n\big((1-\varepsilon)\log n\big) = e^{(-1+\varepsilon)\log n} - \frac{(1-\varepsilon)\log n}{n}$$

$$= \frac{\overbrace{n^{\varepsilon} - (1-\varepsilon)\log n}}{n} \longleftarrow \text{è} > 0 \ \forall n \geq \overline{n}_{\varepsilon}$$

$0 < \varepsilon < 1$

$$n^{\varepsilon} - (1-\varepsilon)\log n \xrightarrow{n\to\infty} +\infty$$

Se $n > \max(e, \overline{n}_{\varepsilon}) \implies \varphi_n\big((1-\varepsilon)\log n\big) > 0$

$\varphi_n(\log n) < 0$

$$\implies \alpha_n \in \big[(1-\varepsilon)\log n, \log n\big] \quad \forall n > \max(\varepsilon, \overline{n}_{\varepsilon})$$

$\boxed{\text{14 dic 2021}}$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \underbrace{(-1)^n \left(\sqrt[n]{n}-1\right)^{\alpha}}_{x_n} \qquad (\alpha>0)$$

Q: 1) Per quali α converge
2) Per quali α converge assolutamente

$$|x_n| = \left(\sqrt[n]{n}-1\right)^{\alpha} \sim \frac{(\log n)^{\alpha}}{n^{\alpha}}$$

$$\sqrt[n]{n} = e^{\frac{\log n}{n}}-1 \sim \frac{\log n}{n}$$

$$\sum \frac{(\log n)^{\alpha}}{n^{\alpha}} \quad \text{converge} \iff \alpha>1$$

se $\alpha = 1+2\delta$ con $\underline{\underline{\delta>0}}$

$$\frac{(\log n)^{\alpha}}{n^{\alpha}} = \frac{1}{n^{1+\delta}} \cdot \overbrace{\frac{(\log n)^{1+\delta}}{n^{\delta}}}^{o(1)\ n\to\infty}$$

$$0 \le \frac{(\log n)^{\alpha}}{n^{\alpha}} \le \frac{c}{n^{1+\delta}}$$

$\Rightarrow$ La serie converge assolutamente $\forall \alpha>1$
non conv. assolutamente se $\alpha\le 1$

se $\alpha\in(0,1)$ la serie conv. semplicemente

$$n \mapsto \left(\sqrt[n]{n} - 1\right)^{\alpha}$$ è decrescente per $n \geq 3$ (visto qualche sett. fa)

$(\alpha > 0)$

è infinitesima

$\Longrightarrow$ Per Leibnitz la serie converge anche per $\alpha \in (0,1]$

$$\left(\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k^2}\right) + \left(\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k^3}\right) + \left(\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k^4}\right) + \dots$$

Converge o diverge?

$$\frac{1}{4} \quad \frac{1}{9} \quad \frac{1}{16} \quad \frac{1}{32}$$

$$\frac{1}{8} \quad \frac{1}{27} \quad \frac{1}{81} \quad \dots$$

$$\frac{1}{16}$$

È una serie telescopica

$$\sum_{p=2}^{+\infty}\left(\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k^p}\right) = \sum_{k=2}^{+\infty}\sum_{p=2}^{+\infty} \frac{1}{k^p} = \sum_{k=2}^{+\infty}\left(\frac{1/k^2}{1-1/k}\right)$$

$$= \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k^2-k} = 1$$

↑ è il riordinamento di una serie assolutamente conv.

↑ converge

$$\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \qquad |x| < 1$$

con la formula del prodotto di serie

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)\, x^n \qquad \text{per } |x| < 1$$

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \underbrace{\left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\right)}_{\text{nel nostro caso}} x^k$$

Vale per $|x| < \min(R_A, R_B)$

$$\begin{cases} F_0 = 0 \\ F_1 = 1 \\ F_{n+2} = F_{n+1} + F_n \end{cases}$$

F_n succ. dei numeri di Fibonacci

$$F_{n+2} \leq 2 F_{n+1}$$

$$\phi(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} F_n x^n$$

Che raggio di cv ha?

$0 \leq F_n \leq 2^n \Longrightarrow$ Raggio di cv è positivo

$$\phi(x) = F_0 \cdot x^0 + F_1 x + \sum_{n=0}^{+\infty} F_{n+2} x^{n+2}$$

$$x\phi(x) = F_0 x + \sum_{n=0}^{+\infty} F_{n+1} x^{n+2}$$

$$x^2\phi(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} F_n x^{n+2}$$

$$\phi(x) - x\phi(x) - x^2\phi(x) = \cancel{F_0} + F_1 x - \cancel{F_0 x} + \sum_{n=0}^{+\infty} \overbrace{\left(F_{n+2} - F_{n+1} - F_n\right)}^{0} x^{n+2}$$

$$\phi(x)\left(1 - x - x^2\right) = x$$

$$\begin{cases} \boxed{F_{n+2} = F_{n+1} + F_n} \\ F_0 = 0 \\ F_1 = 1 \end{cases}$$

$$\phi(x) = \frac{x}{1 - x - x^2} \quad \text{per } |x| < R$$

$$\frac{x}{1-x-x^2} = \frac{A}{x-\alpha} + \frac{B}{x-\beta}$$

dove α, β sono radici di $1-x-x^2=0$

(oss: $\alpha \neq \beta$)

$$-\frac{x}{(x-\alpha)(x-\beta)} = \frac{A}{x-\alpha} + \frac{B}{x-\beta} \qquad x \notin \{\alpha, \beta\}$$

$$\Updownarrow$$

$$-x = A(x-\beta) + B(x-\alpha)$$

se vale $\forall x \neq \alpha, \beta$ per continuità vale anche per $x=\alpha$ e $x=\beta$

$$-\beta = B(\beta-\alpha) \implies B = \frac{\beta}{\alpha-\beta}$$

$$-\alpha = A(\alpha-\beta) \implies A = -\frac{\alpha}{\alpha-\beta}$$

$$\frac{A}{x-\alpha} = (A/-\alpha)\,\frac{1}{1-(x/\alpha)} = -\frac{A}{\alpha}\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{x}{\alpha}\right)^k$$

Es: Ricavare l'espressione di F_n scrivendo $\sum F_n x^n$ come combinaz. lineare di due serie geometriche.

Esercizio:

$$\boxed{\sum a_n x^n = \sum b_n x^n \quad \forall\, |x|<\delta \implies a_n = b_n \;\forall n}$$

SVILUPPI in BASE $p \in \mathbb{N}$ $(p \geq 2)$

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \varepsilon_k \, p^{-k} \qquad \varepsilon_k \in \{0, \dots, p-1\}$$

$$\underline{\varepsilon} = (\varepsilon_k)_{k=1}^{\infty} \in \{0, \dots, p-1\}^{\mathbb{N}_*}$$

$$= (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots)$$

$p=10$ sviluppi decimali

$p=2$ sviluppi binari

$$\phi : \{0, \dots, p-1\}^{\mathbb{N}_*} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\underline{\varepsilon} \longmapsto \phi(\underline{\varepsilon}) = \sum_{k=1}^{+\infty} \varepsilon_k \, p^{-k}$$

$$0 \leq \phi(\underline{\varepsilon}) \leq (p-1) \sum_{k=1}^{+\infty} p^{-k} = (p-1) \frac{p^{-1}}{1 - p^{-1}} = (p-1) \frac{1}{p-1} = 1$$

$$0 \leq \phi(\underline{\varepsilon}) \leq 1 \quad \text{e} \quad \phi(\underline{\varepsilon}) = 1 \iff \varepsilon_k = p-1 \quad \forall k$$

$$\phi(\underline{\varepsilon}) = 0 \iff \varepsilon_k = 0 \quad \forall k$$

$\mathrm{Im}(\phi) \subseteq [0,1]$ $\quad$ In realtà vale $\mathrm{Im}(\phi) = [0,1]$

Se $\alpha \in [0,1]$ $\quad$ $\varepsilon_0 = 0$, $\alpha_0 = \alpha$

$$\begin{cases} \varepsilon_{n+1} = \lfloor p \alpha_n \rfloor \\ \alpha_{n+1} = p\alpha_n - \lfloor p \alpha_n \rfloor \in [0,1) \end{cases}$$

Dimostrare per induzione che $\boxed{\alpha = \sum_{k=1}^{n+1} \varepsilon_k p^{-k} + \underbrace{p^{-(n+1)} \alpha_{n+1}}}$ $\quad \forall n \geq 0$

$\alpha_0 = \alpha$

$\alpha_1 = p\alpha - \lfloor p\alpha \rfloor$

$= p\alpha - \varepsilon_1 \quad \rightsquigarrow \quad \alpha_0 = p^{-1}(\alpha_1 + \varepsilon_1) = \dfrac{\varepsilon_1}{p} + \dfrac{\alpha_1}{p}$

$\alpha = \varepsilon_1/p + p^{-2}\alpha_2$

Per $n \to \infty$ $\quad \displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} \varepsilon_k p^{-k} = \alpha - p^{-(n+1)}\alpha_{n+1} \longrightarrow \alpha$

ovvero $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \varepsilon_k p^{-k} = \alpha$

$(\underline{\varepsilon}'), (\underline{\varepsilon}) \in \{0, \dots, p-1\}^{\mathbb{N}_*}$

$$\begin{cases} \varepsilon_k = \varepsilon'_k & \forall\, k < k_0 \\ \varepsilon_{k_0} > \varepsilon'_{k_0} \end{cases}$$

$\Downarrow$

$$\phi(\underline{\varepsilon}) - \phi(\underline{\varepsilon}') = \sum_{k=k_0}^{+\infty} (\varepsilon_k - \varepsilon'_k)\, p^{-k} \qquad (*)$$

$$|\phi(\underline{\varepsilon}) - \phi(\underline{\varepsilon}')| \leq (p-1) \sum_{k=k_0}^{+\infty} p^{-k} = (p-1)\frac{(1/p)^{k_0}}{1 - 1/p} = \left(\frac{1}{p}\right)^{k_0-1}$$

$$\phi(\underline{\varepsilon}) - \phi(\underline{\varepsilon}') \geq (\varepsilon_{k_0} - \varepsilon'_{k_0})\, p^{-k_0} + \sum_{k=k_0+1}^{+\infty} (\varepsilon_k - \varepsilon'_k)\, p^{-k}$$

$$\geq (\varepsilon_{k_0} - \varepsilon'_{k_0}) p^{-k_0} - p^{-k_0} \geq 0$$

e vale l'uguale $\Leftrightarrow$

$\varepsilon_{k_0} = \varepsilon'_{k_0} + 1$ & $\begin{cases} \varepsilon_k = 0 \\ \varepsilon'_k = p-1 \end{cases} \forall k > k_0$

$p=2$

— o —

Es: (1) Mostrare che $\alpha \in \mathbb{Q} \cap [0,1] \Longleftrightarrow \alpha = \sum_{k=1}^{+\infty} \varepsilon_k 2^{-k}$ con ε_k pre-periodica

(2) $\alpha = \frac{p}{q}$ con $(p,q)=1$, q dispari $\Longleftrightarrow \alpha = \sum \varepsilon_k 2^{-k}$, ε_k periodica

(3) Se $F(x) = \sum \varepsilon_k x^k$ con $\varepsilon_k \in \{0,1\}$ $\forall k$ e $F(\frac{1}{2}) \in \mathbb{Q}$ $\Longrightarrow F(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ con P, Q polinomi

---

$$C = \left\{ x \in [0,1] : x = \sum_{k=1}^{+\infty} \varepsilon_k 3^{-k} \quad \varepsilon_k \in \{0,2\} \right\}$$

C è chiuso, $\partial C = C$, C non contiene alcun intervallo

— o —

$x_n \in C$ $\quad x_n \longrightarrow \bar{x} \Longrightarrow \varepsilon_k(n) \xrightarrow[n \to +\infty]{} \bar{\varepsilon}_k \quad \forall k$

$x_n = \sum_{k=1}^{+\infty} \varepsilon_k(n) 3^{-k}$

Per verificare le altre due proprietà basta vedere che

$x \in C \qquad x = \sum \varepsilon_k 3^{-k} \qquad \varepsilon_k \in \{0,2\}$

$\tilde{x} = \sum \tilde{\varepsilon}_k 3^{-k}$

con $\tilde{\varepsilon}_k = \begin{cases} \varepsilon_k & k \leq k_0 \\ 1 & k > k_0 \end{cases}$

allora $\tilde{x} \notin C$ e $\tilde{x}$ è può essere reso arb. vicino a x prendendo k_0 grande

—o—

ESERCIZIO

Sia $F : C \longrightarrow [0,1]$ definita da

$$x = \sum_{k=1}^{+\infty} \varepsilon_k 3^{-k} \longmapsto F(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{\varepsilon_k}{2}\right) 2^{-k}$$

- verificare che F è surg. e deb. crescente
- $\tilde{F}(x) = \sup_{\substack{t \in C \\ t \leq x}} F(t)$

$\tilde{F}(x)$ deb. crescente

$\tilde{F}(x) = F(x) \quad \forall x \in C$

$\tilde{F}$ è continua

3 mar 2022

Ric Stud: merc ore 16.30 →

TEOREMI di de L'Hôpital $\frac{0}{0}$ o $\frac{\infty}{\infty}$

TEOR (H; $\frac{0}{0}$) $x_0 \in \mathbb{R}$, I intorno di x_0 $(x_0 \in I)$

- f, g continue su I, $f(x_0) = g(x_0) = 0$
- f, g derivabili su $I \setminus \{x_0\}$, $g'(x) \neq 0$ $\forall x \in I \setminus \{x_0\}$

Allora

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell \implies \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell$$

OSS: Non vale il viceversa ($\Leftarrow$)

$f(x) = x^2 \sin\frac{1}{x}$ $\qquad f'(x) = 2x \sin\frac{1}{x} + x^2 \cos\frac{1}{x}\left(-\frac{1}{x^2}\right)$

$g(x) = \sin x$ $\qquad g'(x) = \cos x$

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \underbrace{x}_{\text{infinit.}} \cdot \underbrace{\frac{x}{\sin x} \sin\frac{1}{x}}_{\text{limitata}}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \to 0} \frac{2x \sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}}{\cos x}$$

non esiste il limite

$f(x) = x - \sin x$

$g(x) = x^3$

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{x - \sin x}{x^3}$$

$\sin x \sim x$

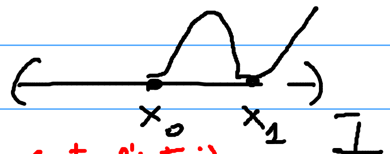
$\sin x = x + o(x)$ $\Big\}$ o—

$$\lim_{x\to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{3x^2} \overset{H}{=} \frac{1}{6} \Longrightarrow \lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{1}{6}$$

$$\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{f''(x)}{g''(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{6x} = \frac{1}{6}}$$

— o —

Dim: oss g non si annulla in $I \setminus \{x_0\}$



perchè se $g(x_1) = 0 = g(x_0)$

ROLLE $\Longrightarrow \exists\, c \in (x_0, x_1) \subset I$ per cui $f'(c) = 0$ (contro l'ipotesi)

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \frac{f'(\xi_x)}{g'(\xi_x)} \xrightarrow{x \to x_0} \ell$$

per limite di una composiz.

$$\Longrightarrow \exists\, \xi_x \in (x_0, x) \text{ t.c. } \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \frac{f'(\xi_x)}{g'(\xi_x)}$$

se $x \to x_0 \Longrightarrow \xi_x \to x_0$

#

$\left(x_0 = -\infty \quad \text{dim analoga}\right)$

Teo $\left[H;\ \frac{0}{0}\right]$ "$x_0 = +\infty$"

Siano $f,g \in C((a,+\infty))$, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} g(x) = 0$

f,g derivabili su $(a,+\infty)$ $\quad g'(x)\neq 0 \quad \forall x\in(a,+\infty)$

Allora

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell \implies \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = \ell$$

OSS/esercizio: Non vale ($\Leftarrow$); trovare un controesempio

Dim: $\tilde f(t) = f\left(\frac{1}{t}\right) \qquad \tilde g(t) = g\left(\frac{1}{t}\right)$

$\tilde f, \tilde g$ sono continue $\left(0, \frac{1}{a}\right)$

$$\lim_{t\to0}\tilde f(t) = 0 = \lim_{t\to0}\tilde g(t)$$

$$\tilde f'(t) = f'\left(\frac{1}{t}\right)\cdot\left(-\frac{1}{t^2}\right)$$

$$\tilde g'(t) = g'\left(\frac{1}{t}\right)\cdot\left(-\frac{1}{t^2}\right)$$

$$\lim_{t\to0^+}\frac{\tilde f'(t)}{\tilde g'(t)} = \lim_{t\to0^+}\frac{f'(1/t)}{g'(1/t)} \underset{x=1/t}{=} \lim_{x\to+\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell$$

$$\Rightarrow \ell = \lim_{t\to0^+}\frac{\tilde f(t)}{\tilde g(t)} = \lim_{t\to0^+}\frac{f(1/t)}{g(1/t)} = \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}$$

$*$

TEOR $\left[H; \frac{\infty}{\infty}\right]$ $\quad I$ intorno di x_0; $\quad I^* = I \setminus \{x_0\}$

$f, g \in C(I^*)$ $\qquad \lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = +\infty$

f, g derivabili I^*, $\quad g'(x) \neq 0 \quad \forall x \in I^*$

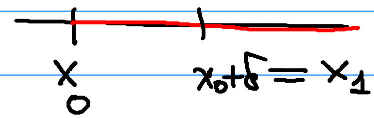
Allora

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell \implies \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell$$

— o —

Dim: (caso $\ell \in \mathbb{R}$) $\qquad$ Dimostro $\boxed{\lim_{x\to x_0^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell}$

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0$ t.c.



$$\ell - \varepsilon \leq \frac{f'(x)}{g'(x)} \leq \ell + \varepsilon \qquad \forall x \in (x_0, x_0+\delta)$$

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(x_1)}{g(x) - g(x_1)} \cdot \frac{f(x)}{f(x) - f(x_1)} \cdot \frac{g(x) - g(x_1)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(x_1)}{g(x) - g(x_1)} \cdot \frac{1 - \frac{g(x_1)}{g(x)}}{1 - \frac{f(x_1)}{f(x)}}$$

$h(x) = 1 + o(1)$ per $x \to +\infty$

$\exists \xi_x \in (x, x_1)$ t.c. $\qquad \frac{f(x) - f(x_1)}{g(x) - g(x_1)} = \frac{f'(\xi_x)}{g'(\xi_x)}$

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(\xi_x)}{g'(\xi_x)} \cdot h(x)$$

$$\limsup_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \limsup_{x \to x_0} \frac{f'(\xi_x)}{g'(\xi_x)} \cdot \overbrace{\lim_{x \to x_0} h(x)}^{1} \leq \ell + \varepsilon$$

$$\liminf_{x \to +x_0} \frac{f(x)}{g(x)} \geq \ell - \varepsilon$$

$\forall \varepsilon > 0$ $\quad \ell - \varepsilon \leq \liminf_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} \leq \limsup_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} \leq \ell + \varepsilon$

arbitrarietà di $\varepsilon > 0$ $\Longrightarrow$ $\liminf_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell = \limsup_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$

$$\Longrightarrow \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell$$

I casi $\ell = +\infty$ e $\ell = -\infty$ per esercizio.

USI & ABUSI

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\log x}{x} \rightsquigarrow \lim_{x\to+\infty} \frac{1/x}{1} = 0 \qquad \frac{\infty}{\infty}$$

$$\| \\ 0$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\log x}{x} \rightsquigarrow \lim_{x\to 0^+} \frac{1/x}{1} = +\infty$$

NO

NB: $\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x}\cdot \log x = -\infty$

non è un caso del tipo $\frac{0}{0}$ o $\frac{\infty}{\infty}$

$$f(x) = x \qquad f'(x) = 1$$

$$g(x) = \sqrt{1+x^2} \qquad g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1+x^2}}\cdot(2x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{1+x^2}}{x}$$

L'Hôpital-loop

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x) - x}{x^2} \overset{H}{\rightsquigarrow} \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{1+x} - 1}{2x} = -\frac{\cancel{x}}{1+x}\cdot\frac{1}{2\cancel{x}} = -\frac{1}{2}$$

OSS:
$$\frac{\log(1+x)-x}{x^2} = -\frac{1}{2} + o(1) \quad \text{per } x \to 0$$

$$\log(1+x) = x + x^2\left(-\frac{1}{2} + o(1)\right)$$

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + o(x^2) \quad \text{per } x \to 0$$

$$\lim_{x\to+\infty} x^3\left(\arctan x - \frac{\pi}{2} + \frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\overbrace{\arctan x - \frac{\pi}{2} + \frac{1}{x}}^{f(x)}}{\underbrace{1/x^3}_{g(x)}} = \frac{1}{3} \quad \boxed{\frac{0}{0}}$$

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{x^2} = \frac{\cancel{x^2} - 1 - \cancel{x^2}}{x^2(1+x^2)}$$

$$g'(x) = -3x^{-4}$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{+\frac{1}{x^2(1+x^2)}}{+3x^{-4}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{3} \cdot \frac{x^{\cancel{4}\,2}}{\cancel{x^2}(1+x^2)} = \frac{1}{3}$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{1}{3}$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\overbrace{x+\sin x^2}^{f(x)}}{\underbrace{1+x^2}_{g(x)}} \qquad \frac{\infty}{\infty}$$

$$f'(x) = 1 + 2x\cos x^2$$

$$g'(x) = 2x$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{2x} + \cos x^2$$

non ha limite

$\Longrightarrow$ non posso usare de L'Hôp

$$\frac{x-1}{1+x^2} \leq \frac{x+\sin x^2}{1+x^2} \leq \frac{x+1}{1+x^2}$$

$$\downarrow \qquad\qquad \downarrow \qquad\qquad \downarrow$$

$$0 \qquad\qquad 0 \qquad\qquad 0$$

$$\frac{x\pm 1}{1+x^2} \sim \frac{1}{x}$$ per $x\to$

$$\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^{1/x} - e}{x} \qquad \frac{0}{0}$$

$$f(x) = (1+x)^{1/x} - e = e^{\frac{1}{x}\log(1+x)} - e \qquad f'(x) = e^{\frac{1}{x}\log(1+x)} \cdot \frac{\frac{x}{1+x} - \log(1+x)}{x^2}$$

$$g(x) = x \qquad g'(x) = 1$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to 0} \boxed{(1+x)^{1/x}} \cdot \boxed{\frac{\frac{x}{1+x} - \log(1+x)}{x^2} \ (*)} = -\frac{e}{2}$$

$(*)$ $\frac{0}{0}$

$$f_1(x) = 1 - \log(1+x) - \frac{1}{1+x} \qquad f_1'(x) = -\frac{1}{1+x} + \frac{1}{(1+x)^2}$$

$$g_1(x) = x^2 \qquad g_1'(x) = 2x$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{f_1'(x)}{g_1'(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{1+x} \cdot \frac{\frac{1}{1+x} - 1}{2x} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{1+x} \cdot \frac{-x}{1+x} \cdot \frac{1}{2x}$$

$$= -\frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{f_1(x)}{g_1(x)} = -\frac{1}{2}$$

$\frac{0}{0}$

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x\tan x}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\tan x - x}{x^2\tan x}$$

$f(x)=\tan x - x \qquad f'(x)=\cancel{1}+\tan^2 x \cancel{-1}$

$g(x)=x^2\tan x \qquad g'(x)=2x\tan x + x^2(1+\tan^2 x)$

$$\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{2x\tan x + x^2(1+\tan^2 x)}=$$

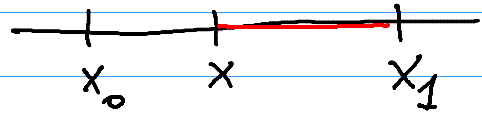
$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{2\frac{x}{\tan x}+\frac{x^2}{\tan^2 x}(1+\tan^2 x)}=\frac{1}{3}$$

10 marzo 2022

ERRATA CORRIGE (dim Hôpital, $\frac{\infty}{\infty}$)

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(x_1)}{g(x) - g(x_1)}\, h(x) \qquad \text{con } h(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} 1$$

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{g(x) - g(x_1)} = \frac{f'(\xi_x)}{g'(\xi_x)}$$



$$\xi_x \in \cancel{(x_0, x)}$$
$$\in (x, x_1)$$

Formula di Taylor con resto di
- Peano ← serve per calcolare limiti $x \to x_0$
- Lagrange ← utile per ottenere info di tipo "globale"

f deriv. $(n+1)$ volte in I intorno di x_0

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{k}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} \qquad \xi \in (x_0, x)$$

① Calcolare $\sin(1)$ con un errore inferiore a $\frac{1}{100}$

$f(x) = \sin x$

oss: Il pol di Taylor (McLaurin) di una funz disp ha solo monomi di grado dispari

$$\sin x = \underbrace{x - \frac{x^3}{3!} + \dots + (-1)^{n+1} \cdot \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}}_{\text{sviluppo di ordine } 2n} + 0 + R_n(x)$$

con $|R_n(x)| = \left| \frac{\sin(\xi)\, |x|^{2n+1}}{(2n+1)!} \right|$ derivata di ord $2n+1$ del sin valutata in ξ

$\xi \in (0, x)$

Voglio usare questa formula per $x = 1$

Determinare n in modo che $|R_n(1)| < \frac{1}{100}$

$$|R_n(1)| \leq \frac{1}{(2n+1)!}$$

n	$\frac{1}{(2n+1)!}$
1	$1/3!$
2	$1/5!$

$$R_2(1) \leq \frac{1}{120} < \frac{1}{100}$$

$5! = 120$

$$\sin(1) = \underbrace{1 - \frac{1}{6}}_{5/6} + R_2(1)$$

<u>Es</u>: fare lo stesso conto per ottenere un'approssim a meno di 10^{-4}

Es: Dimostrare che

(i) $\cos x \geq 1 - \frac{x^2}{2} \qquad \forall x \in \mathbb{R}$

(ii) $\sin x \geq x - \frac{x^3}{6} \qquad \forall x > 0$

Dim (i) scrivo la formula di Taylor con resto di Lag
con $x_0 = 0$, $n = 1$, $f(x) = \cos x$

$$\cos x = 1 + 0 + \frac{f''(\xi)}{2} x^2 \qquad f''(x) = -\cos x$$

$$= 1 - \frac{\cos \xi}{2} \cdot x^2 \qquad -(\cos \xi) x^2 \geq -x^2$$

$$\geq 1 - \frac{x^2}{2}$$

Es$_1$: dimostrare (ii)

Es$_2$: dimostrare (i) e (ii) facendo uno studio di funz.

TAYLOR CON Resto di Peano

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{k}(x_0)}{k!} (x-x_0)^k + R(x)$$

$$R(x) = o\,(x-x_0)^{n+1}$$

per $x \longrightarrow x_0$

$$\left(p(x)\, e^{-x^2/2}\right)' = (p' - xp)\, e^{-x^2/2}$$

$$\boxed{\text{TAYLOR Vs de L'Hôpital}}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^{-x^2/2} - \cos x}{x^4}$$

$$\boxed{f(x) = e^{-x^2/2} - \cos x}$$

$$g(x) = x^4$$

$$f'(x) = -x e^{-x^2/2} + \sin x \qquad g'(x) = 4x^3 \qquad \frac{f'}{g'}$$

$$f''(x) = (-1+x^2)\, e^{-x^2/2} + \cos x \qquad g''(x) = 12x^2$$

$$f'''(x) = (3x - x^3)\, e^{-x^2/2} - \sin x \qquad g'''(x) = 24x$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{f'''(x)}{g'''(x)} = \lim_{x \to 0} \left[\frac{(3\cancel{x} - x^{\cancel{3}\,2})\, e^{-x^2/2}}{\cancel{x}} - \frac{\sin x}{x} \right] \cdot \frac{1}{24} = \frac{2}{24} = \frac{1}{12}$$

stesso esercizio, con Taylor

$$f(x) = e^{-x^2/2} - \cos x$$

$$\cos x = \boxed{1 - \frac{x^2}{2}} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4)$$

$$e^y = 1 + y + \frac{y^2}{2} + o(y^2) \qquad y = -\frac{x^2}{2}$$

$$e^{-x^2/2} = \boxed{1 - \frac{x^2}{2}} + \frac{1}{2}\left(-\frac{x^2}{2}\right)^2 + o(x^4)$$

$$f(x) = \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{4!}\right)x^4 + o(x^4) \qquad 4! = \overbrace{4 \cdot 3 \cdot 2}^{8} \cdot 1$$

$$= \frac{1}{8}\left(1 - \frac{1}{3}\right)x^4 + o(x^4) = \frac{1}{12}x^4 + o(x^4) \qquad \frac{1}{8} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{12}$$

$$\lim_{x \to x} \frac{f(x)}{x^4} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{12}x^4 + o(x^4)}{x^4} = \lim_{x \to 0}\left(\frac{1}{12} + \frac{o(x^4)}{x^4}\right) = \frac{1}{12}$$

Lemma: f, g infinitesime definite in un intorno di 0

$$f(x) = O(x^m)$$
$$\circledast \quad g(x) = o(x^n) \qquad \text{per } x \to 0$$

allora $f \circ g$ e $g \circ f$ sono $o(x^{n \cdot m})$

sinteticamente: $o\left(O(x^m)^n\right) = o(x^{n \cdot m})$

$$O\left((o(x^n))^m\right) = o(x^{n \cdot m})$$

Dim

$$f(g(x)) \leq C|g(x)|^m \qquad \exists\, C : |f(x)| \leq C|x|^m$$

in un intorno di 0

$$g(x) = x^n\, \omega(x) \quad \text{con} \quad \omega(x) = o(1)$$

$$\leq C\, |x|^{n \cdot m} \cdot |\omega(x)|^m$$

$$= |x|^{n \cdot m} \cdot o(1) \implies f \circ g\,(x) = o(x^{n \cdot m})$$

Es: verificare che $g \circ f(x) = o(x^{n \cdot m})$

Limiti visti 3 mar 2022

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x) - x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \left(\frac{-x^2/2 + o(x^2)}{x^2} \right) = -\frac{1}{2}$$

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

$$\lim_{x\to+\infty} x^3 \left(\arctan x - \frac{\pi}{2} + \frac{1}{x}\right)$$

$$x = \frac{1}{t}$$

$$t > 0 \quad (t \to 0^+)$$

$$= \lim_{t\to 0^+} \frac{\arctan\frac{1}{t} - \pi/2 + t}{t^3}$$

$$\arctan\frac{1}{t} = \frac{\pi}{2} - \arctan t$$

$$= \lim_{t\to 0^+} \frac{t - \arctan t}{t^3}$$

$$\arctan t = t - \frac{t^3}{3} + o(t^3)$$

$$= \lim_{t\to 0^+} \frac{t^3/3 + o(t^3)}{t^3} = \frac{1}{3}$$

$$\frac{1}{1+t^2} = 1 - t^2 + o(t^2)$$

$$\frac{1}{1+y} = 1 - y + y^2 + \dots$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\overbrace{(1+x)^{1/x} - e}^{\to f(x)}}{x} = -\frac{e}{2}$$

$$(1+x)^{1/x} = \exp\left(\frac{\log(1+x)}{x}\right) = e^{1-\frac{x}{2}+o(x)}$$

$$\frac{\log(1+x)}{x} = 1 - \frac{x}{2} + o(x)$$

$O(y)$

$$f(x) = e^{1-x/2+o(x)} - e = e\left(e^{-x/2+o(x)} - 1\right)$$

$$\overset{\odot}{=} e\left(\underbrace{-\frac{x}{2}+o(x)}_{y} + o\left(\underbrace{-\frac{x}{2}+o(x)}\right)\right)$$

$$\odot \quad e^{y} - 1 = y + o(y)$$

$$= -\frac{e}{2}x + o(x)$$

---o---

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \underbrace{\left[e - \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\right]}_{a_n}$$

converge

$c=\frac{e}{2}$

$a_n = -f\left(\frac{1}{n}\right)$

con $f(x) = (1+x)^{1/x} - e$

$f(x) = -\frac{e}{2}x + o(x)$ per $x \to 0$

$$a_n = +\frac{e}{2}\cdot\frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$a_n \sim c\cdot\frac{1}{n}$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \log\left(1+\frac{(-1)^n}{n^\alpha}\right)$$

dire per quali α converge la serie

<u>Es</u>: Calcolare con taylor $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x\tan x}\right)$

<u>Es</u>: Sia $f\in C^2(\mathbb{R})$ $x_0\in\mathbb{R}$

Calcolare $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-2f(x_0)+f(x_0-h)}{h^2}$

$\rightarrow$ usando taylor

$\rightarrow$ de l'Hôpital

$$\ell = \lim_{x \to 0} \frac{\log(1+\sin x) - \sin \log(1+x)}{x^{\alpha}}$$

determinare α in modo che $\ell \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

(provare con sagemath :)

15 mar 2022

(i) $\cos x \geq 1 - \frac{x^2}{2} \quad \forall x \in \mathbb{R}$

(ii) $\sin x \geq x - \frac{x^3}{6} \quad \forall x \geq 0$

} via studi di funz.

$f(x) = \cos x - 1 + \frac{x^2}{2}$ (i) $\Leftrightarrow f(x) \geq 0 \ \forall x$

$\boxed{\begin{array}{l} f(0) = 0 \\ f'(x) \geq 0 \ \forall x \geq 0 \end{array}}$ $\quad f'(x) = -\sin x + x \geq 0 \quad \forall x \geq 0$

$\Rightarrow f(x) \geq 0 \quad \forall x \geq 0$

anzi, $\forall x \in \mathbb{R}$ perché f è pari

(ii) $g(x) = \sin x - x + \frac{x^3}{6}$ (ii) $\Rightarrow g(x) \geq 0 \quad \forall x \geq 0$

$g'(x) = \cos x - 1 + \frac{x^2}{2} = f(x) \geq 0$

$g' \geq 0 \Rightarrow g$ crescente

$\left.\begin{array}{l} g(0) = 0 \\ g \text{ crescente} \end{array}\right\} \Rightarrow g(x) \geq 0 \quad \forall x \geq 0$

Es: Mostrare che

$\cos x \leq 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$\sin x \leq x - \frac{x^3}{3!} + x^5/5! \quad \forall x \geq 0$

E generalizzare il risultato

$f \in C^2(\mathbb{R})$

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - 2f(x_0) + f(x_0-h)}{h^2} = (*)$$

$$f(x_0+h) = f(x_0) + f'(x_0)\cdot h + \frac{f''(x_0)}{2} h^2 + o(h^2)$$

$$f(x_0-h) = f(x_0) + f'(x_0)(-h) + \frac{f''(x_0)}{2}(+h)^2 + o(h^2)$$

$$\oplus \quad -2f(x_0)$$

$$N = 0 + 0 + f''(x_0)h^2 + o(h^2)$$

$$(*) = \lim_{h\to 0} \frac{f''(x_0)h^2 + o(h^2)}{h^2} = \lim_{h\to 0} f''(x_0) + \frac{o(h^2)}{h^2}$$

$$= f''(x_0)$$

$$\sum_{n=2} \overbrace{\log\left(1+\frac{(-1)^n}{n^\alpha}\right)}^{x_n} \qquad \alpha>0$$

Q: Per quali α la serie converge?

$$\omega(x) = x - \log(1+x) \qquad \log(1+x) = x - \omega(x)$$

$$x_n = \frac{(-1)^n}{n^\alpha} - \omega\left(\frac{(-1)^n}{n^\alpha}\right)$$

$$= a_n - b_n$$

$$\omega(x) \geq 0 \qquad \forall x > -1$$

$$\omega(x) = x - \log(1+x) = x - \left(x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right)$$

$$= \frac{x^2}{2} + o(x^2) \implies \omega(x) \sim \frac{x^2}{2} \quad \text{per } x \to 0$$

$$b_n = \omega\left(\frac{(-1)^n}{n^\alpha}\right) \sim \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{(-1)^n}{n^\alpha}\right)^2 = \frac{1}{n^{2\alpha}}$$

$$\sum b_n \text{ converge} \iff \alpha > \frac{1}{2}$$

crit. confronto asintotico

se $\alpha > \frac{1}{2}$ $\sum x_n$ converge

se $\alpha \leq \frac{1}{2}$ $\sum x_n$ diverge a $-\infty$

— o —

Determinare $\alpha \geq 0$ in modo che

$N(x)$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\log(1+\sin x) - \sin\log(1+x)}{x^\alpha} = \ell \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$$

Quanto deve essere α in modo che $N(x) \sim \ell \cdot x^{\alpha}$

con $\ell \neq 0$

parte principale di $N(x)$ per $x \to 0$

ordine di infinitesimo

$$\sin y = y - \frac{y^3}{3!} + \frac{y^5}{5!} + o(y^6)$$

$$\odot \quad \log(1+y) = y - \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3} - \frac{y^4}{4} + o(y^5)$$

$$\log(1+\sin x) \overset{\odot}{=} \sin x - \frac{\sin^2 x}{2} + \boxed{o(\sin^2 x)} \to o(x^2)$$

per $x \to 0$ $\quad \sin^2 x = O(x^2)$

$$= x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

$$\sin\log(1+x) = \log(1+x) + O(\log^3(1+x)) \leftarrow o(x^2)$$

$$= x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

$$N(x) = o(x^2) \qquad (\Rightarrow \alpha > 2)$$

$$\log(1+\sin x) = \sin x - \frac{\sin^2 x}{2} + \frac{\sin^3 x}{3} - \frac{\sin^4 x}{4} + o(\sin^4 x)$$

$$= x - \frac{x^3}{6} - \frac{1}{2}\left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)^2 + \frac{1}{3}\left(x - o(x^2)\right)^3 + \frac{x^4}{4} + o(x^4)$$

$$= x - \frac{x^3}{6} - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^4 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{x^4}{4} + o(x^4)$$

$$\sin\log(1+x) = \log(1+x) - \frac{1}{6}\log^3(1+x) + o(\log^4(1+x))$$

$$= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \frac{1}{6}\left(x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right)^3 + o(x^4)$$

$$= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \frac{1}{6}\left[x^3 - \frac{3x^4}{2}\right] + o(x^4)$$

$$N(x) = x^4\left(\frac{1}{6} + \frac{1}{4} - \left(-\frac{1}{4} + \frac{3}{6\cdot 2}\right)\right) + o(x^4)$$

$f(0)=0 \Rightarrow b=1$

Sia $f(x) = e^{x^2} + ax^2 - b\cos x \qquad a,b \in \mathbb{R}$

Determinare a, b in modo che f si annulli di ordine massimo

- $e^{x^2} = 1 + x^2 + \frac{x^4}{2} + o(x^4)$ $\qquad e^y = 1 + y + \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{6}$
- $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4)$

$f(x) = e^{x^2} + ax^2 - \cos x = \frac{3x^2}{2} + ax^2 + x^4\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4!}\right) + o(x^4)$

R: $b = 1 \quad a = -\frac{3}{2} \qquad f(x) \sim \frac{11}{24}x^4$ per $x \to 0$

Determinare $a \in \mathbb{R}$ in modo che risulti finito il limite

$2 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2}\left(+\frac{1}{2}\right)\cdot\left(+\frac{3}{2}\right)$

$$\lim_{x \to 0} \underbrace{\left(\sqrt{1-(ax)^2} - \frac{\sin x}{x} \right)}_{(*)} \frac{1}{x^4}$$

$$\sqrt{1+y} = (1+y)^{1/2} = 1 + \frac{1}{2}y - \frac{1}{8}y^2 + o(y^2)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{5} + o(x^5)$$

- $$\frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{5!} + o(x^4)$$
- $$\sqrt{1-(ax)^2} = 1 - \frac{1}{2}a^2x^2 - \frac{1}{8}a^4x^4$$

$$(*) = x^2\left(-\frac{1}{6} + \frac{a^2}{2}\right) + x^4\left(\frac{1}{5!} + \frac{1}{8}a^4\right)$$

$$\frac{a^2}{2} = \frac{1}{6} \qquad a = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}$$

Per Casa

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^{\sin x} - (1+x)^{\frac{\sin x}{x}}}{\frac{\sin x}{x} - \cos x}$$

17 marzo 2022

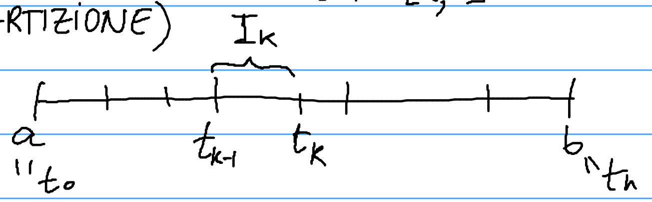
INTEGRALE di RIEMANN
(Calcolo area sottografico di una funzione)

$a<b$

$[a,b]$

$\pi = \{t_0, t_1, \dots, t_n\}$ $\quad t_0=a$, $t_n=b$ $\quad t_0<t_1<\dots<t_n$

SUDDIVISIONE di $[a,b]$
(PARTIZIONE)



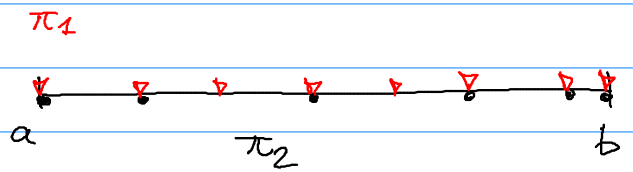
$[a,b] = \bigcup_{K=1}^{n} I_K$

$I_K = [t_{K-1}, t_K]$ $\qquad |I_K| \doteq x_K - x_{K-1}$

$\bigcup_{K=1}^{n} I_K = [a,b]$

<u>Def</u>, π_1, π_2 partizioni di $[a,b]$ dico che

π_1 è più fina di $\pi_2 \overset{def}{\Longleftrightarrow} \pi_2 \subset \pi_1$



<u>OSS</u>$_1$: date π_1 e π_2 partizioni è sempre possibile trovare una partizione $\pi = \pi_1 \cup \pi_2$ più fina di entrambe

OSS$_2$ $\pi_0 = \{a, b\}$ è la partizione meno fina di tutte

$[a,b]$ intervallo

$f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ $\qquad$ f limitata

π partizione di $[a,b]$ $\qquad$ $\pi = \{t_0, t_1, \dots, t_n\}$

$a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$

Somma superiore di f rel. a π

$$\boxed{S(f,\pi)} = \sum_{k=1}^{n} (t_k - t_{k-1}) \sup_{[t_{k-1},t_k]} f$$

$I_k \doteq [x_{k-1}, x_k]$

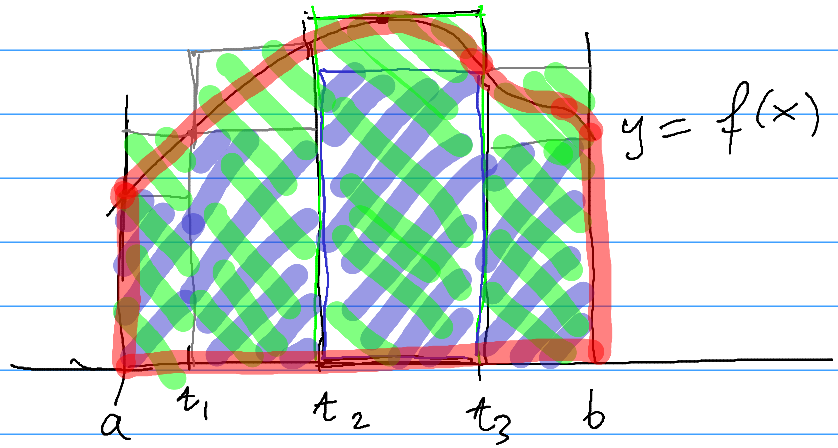
$|I_k| \doteq x_k - x_{k-1}$

$$= \sum_{k=1}^{n} |I_k| \; M_k(f)$$

$M_k \doteq \sup_{I_k} f$

$$\boxed{s(f,\pi)} = \sum_{k=1}^{n} |I_k| \; m_k$$

$m_k \doteq \inf_{I_k} f$



Oss: $M_k \geq m_k \quad \forall k \quad 1 \leq k \leq n$

$S(f,\pi) \geq s(f,\pi)$

π_1, π_2 partizioni di $[a,b]$ $\qquad f:[a,b]\to\mathbb{R}$ limitata

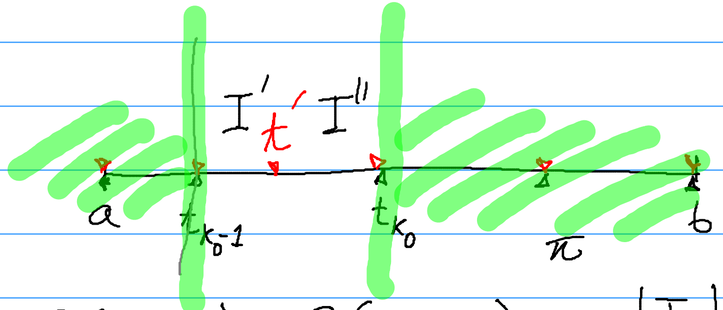
Prop Se π_2 è più fina di π_1

(i) $S(f,\pi_2) \leq S(f,\pi_1)$

(ii) $s(f,\pi_2) \geq s(f,\pi_1)$

Dim: dimostro solo (i). SPG $\quad \pi_1 = \pi = \{t_0, t_1, \dots, t_n\}$

$\pi_2 = \pi \cup \{t'\}$



$$S(f,\pi_1) = \sum_{k=1}^{n} |I_k| \cdot M_k$$

$$S(f,\pi_1) - S(f,\pi_2) = |I_{k_0}| \overbrace{\sup_{I_{k_0}} f}^{M_{k_0}} - \left(|I'| \sup_{I'} f + |I''| \sup_{I''} f\right)$$

$$|I'| \sup_{I'} f \leq |I'| M_{k_0} \qquad I' = [t_{k_0-1}, t']$$

$$|I''| \sup_{I''} f \leq |I''| M_{k_0} \qquad I'' = [t', t_{k_0}]$$

$(+)$

$$\left(|I'| \sup_{I'} f + |I''| \sup_{I''} f\right) \leq |I_{k_0}| M_{k_0}$$

$$-(\quad) \geq -|I_{k_0}| M_{k_0} \implies S(f,\pi_1) - S(f,\pi_2) \geq 0$$

$$S(f,\pi_1) \geq S(f,\pi_2)$$

TEOR: $[a,b]$ $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ limitata

π_1, π_2 partizioni di $[a,b]$

Allora $S(f,\pi_1) \geq s(f,\pi_2)$

Dim: $\pi = \pi_1 \cup \pi_2$ è una partizione che raffina sia π_1 che π_2

$$S(f,\pi_1) \geq S(f,\pi_1\cup\pi_2) \geq s(f,\pi_1\cup\pi_2) \geq s(f,\pi_2)$$

INTEGRALE SUPERIORE di f su $[a,b]$ $\quad \int^*$

$$S(f) = \inf\{S(f,\pi) : \pi \text{ suddivisione di } [a,b] \text{ (finita)}\}$$

$$s(f) = \sup\{s(f,\pi) : \pi \text{ suddivisione } [a,b] \text{ finita}\}$$

PROP: $S(f) \geq s(f)$

Dim Se π_1 è partizione di $[a,b]$

$S(f,\pi_1) \geq s(f,\pi)$ $\quad \forall \pi$ partiz di $[a,b]$

$S(f,\pi_1)$ è un maggiorante $\{s(f,\pi) : \pi \text{ part. di } [a,b]\}$.

$S(f,\pi_1) \geq s(f)$ $\left(= \sup\{ \quad " \quad \}\right)$

$$S(f,\pi_1) \geq s(f) \qquad \forall \pi_1 \text{ partiz di } [a,b]$$

$s(f)$ è un minorante $\{S(f,\pi_1) : \pi_1 \text{ partizione}\}$

$$S(f) = \inf\{S(f,\pi_1) : \pi \text{ part}\} \geq s(f)$$

Può essere che $S(f) > s(f)$

Esempio: $f(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$ $\qquad f:[a,b] \to \mathbb{R}$

π

$$S(f,\pi) = \sum_{k=1}^{n} |I_k|\, M_k = \sum_{k=1}^{n} |I_k| = b-a$$

$$\vee$$

$$s(f,\pi) = \sum_{k=1}^{n} |I_k|\, m_k = 0$$

DEF: $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ limitata

f è INTEGRABILE (secondo Riemann) su $[a,b]$

$$S(f) = s(f) \qquad = \qquad \int_a^b f(t)\,dt$$

e il valore comune si indica con $\longrightarrow$ INTEGRALE di f tra a e b

Se f integrabile allora

<u>OSS</u>: $\quad m(b-a) \leq \int_a^b f(t)\,dt \leq M(b-a)$ $\qquad M = \sup_{[a,b]} f$

$\qquad m = \inf_{[a,b]} f$

$\pi_0 = \{a, b\}$

$$\underset{\displaystyle M(b-a)}{\underset{\|}{S(f,\pi_0)}} \geq S(f) = \int_a^b f(t)\,dt \geq s(f) \geq \underset{\displaystyle m(b-a)}{\underset{\|}{s(f,\pi_0)}}$$

<u>Prop</u>: f è integrabile $\iff \forall \varepsilon > 0 \ \exists \pi$ partizione tale che

$$(0 \leq)\ S(f,\pi) - s(f,\pi) < \varepsilon$$

<u>Dim</u> $(\Longrightarrow)$: $\quad S(f) = \int_a^b f(t)\,dt = s(f)$. $\quad$ Fisso $\varepsilon > 0$

$\exists \pi_1 \quad S(f) + \varepsilon/2 > S(f,\pi_1) \geq S(f,\pi)$

$\exists \pi_2 \quad s(f) \quad \varepsilon/2 < s(f,\pi_2) \leq s(f,\pi)$

$-$

$\pi = \pi_1 \cup \pi_2$

$$\varepsilon > S(f,\pi) - s(f,\pi) \quad (\geq 0)$$

$(\Longleftarrow)$ $\quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \pi$ partiz. t.c. $\quad S(f,\pi) - s(f,\pi) < \varepsilon$

$$0 \leq S(f) - s(f) \leq S(f,\pi) - s(f,\pi) < \varepsilon \qquad \forall \varepsilon > 0$$

$\Longrightarrow S(f) - s(f) = 0 \Longrightarrow f$ è integrabile

PROP$_1$: Se $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ è monotona allora è integrabile

PROP$_2$: Se $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ è L-Lipschitz allora è integrabile

TEOR: Se $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ è continua allora è integrabile

Dim (Prop$_1$) SPG suppongo f crescente

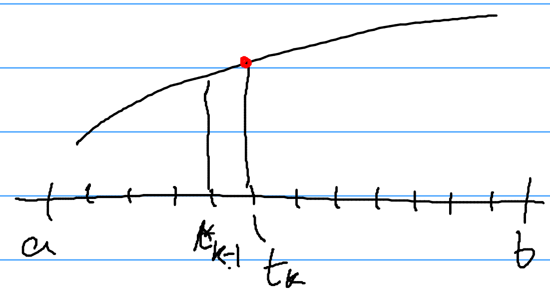
$$f(a)\le f(x)\le f(b) \qquad (\Rightarrow f \text{ limitata})$$

$$\pi_n=\{x_k : 0\le k\le n\} \qquad t_k \doteq a+k\frac{b-a}{n}$$

PARTIZIONE UNIFORME

$$S(f,\pi_n)=\sum_{k=1}^{n}\frac{(b-a)}{n}f(t_k)$$

$$s(f,\pi_n)=\sum_{k=1}^{n}\frac{b-a}{n}f(t_{k-1})$$



$$0\le S(f,\pi_n)-s(f,\pi_n)=\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n}\left[f(t_k)-f(t_{k-1})\right]=\underbrace{\frac{b-a}{n}(f(b)-f(a))}_{\substack{\downarrow\, n\to\infty \\ 0}}$$

$$n>\frac{(b-a)(f(b)-f(a))}{\varepsilon} \quad \text{ho che} \quad S(f,\pi_n)-s(f,\pi_n)<\varepsilon$$

$\Rightarrow f$ integrabile

Dim (Prop 2) $\quad f$ Lipschitz $\Rightarrow f$ continua $\Rightarrow f$ limitata

$$(*) \qquad S(f,\pi) - s(f,\pi) \leq L\delta\,(b-a)$$

con $\delta = \max\{|I_k| : 1 \leq k \leq n\}$ parametro di finezza

$\pi = \{t_0, \dots, t_n\}$

$I_k = [t_{k-1}, t_k]$

$$S(f,\pi) = \sum_{k=1}^{n} |I_k|\, M_k \qquad M_k = \sup_{I_k} f = \max_{I_k} f = f(\xi_k)$$

$$s(f,\pi) = \sum_{k=1}^{n} |I_k|\, m_k \qquad m_k = \inf_{I_k} f = \min_{I_k} f = f(\eta_k)$$

$$S(f,\pi) - s(f,\pi) = \sum_{k=1}^{n} |I_k|\,(M_k - m_k) \leq L\delta \overbrace{\sum_{k=1}^{n} |I_k|}^{(b-a)} \qquad \xi_k, \eta_k \in I_k$$

$$|\xi_k - \eta_k| \leq |I_k| \leq \delta$$

$$0 \leq M_k - m_k = f(\xi_k) - f(\eta_k) \leq L|\xi_k - \eta_k| \leq L\delta$$

I intervallo $\qquad$ —— o ——

DEF: $f : I \to \mathbb{R}$ è <u>uniformemente continua</u> se e solo se

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : \quad \forall x, y \in I \quad \big(|x-y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon \big)$$

Es: Se f è Lip $\Rightarrow f$ è U.C. $\qquad (\delta = \varepsilon/L)$

$f(x) = x^2$ non è unif. continua su $\mathbb{R}$
$f(x) = \sqrt{x}$ è unif su $[0, +\infty)$ } es.

—— o ——

TEOR [HEINE CANTOR] Se $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ è continua
Allora f è anche uniformemente continua

—— o ——

$\boxed{24 \text{ mar } 2022}$

UNIFORME CONTINUITÀ

$f: C \to \mathbb{R}$

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : \quad |x-y| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon$

$\forall x, y \in C$

Es: $f(x) = x^2$

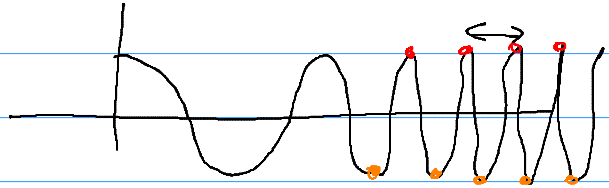
$x_n = n$

$y_n = n + \frac{1}{n}$

$|x_n - y_n| < \frac{1}{n}$

$f(y_n) - f(x_n) = \cancel{n^2} + 2 + \frac{1}{n^2} - \cancel{n^2} \geq 2$

$f(x) = \cos(x^2)$



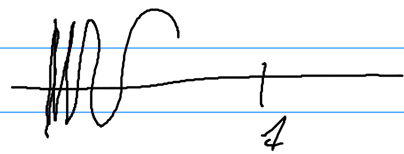
$y_n = \sqrt{(2n+1)\pi}$ $\qquad f(y_n) = -1$

$x_n = \sqrt{2n\pi}$ $\qquad f(x_n) = 1$

$|f(x_n) - f(y_n)| \geq 2$

$0 \leq y_n - x_n = \sqrt{(2n+1)\pi} - \sqrt{2n\pi} = \dfrac{\pi}{\sqrt{(2n+1)\pi} + \sqrt{2n\pi}} \xrightarrow[\text{per } n \to \infty]{} 0$

$f(x) = \cos\frac{1}{x} \qquad x \in (0,1)$



y_n t.c. $\frac{1}{y_n} = (2n+1)\pi \qquad f(y_n) = -1$

x_n t.c. $\frac{1}{x_n} = 2n\pi \qquad f(x_n) = 1$

$x_n \to 0$

$y_n \to 0$

Es: Dire Per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ la funzione

$f(x) = x^{\alpha} \sin \frac{1}{x}$ (i) è unif. continua su $(0,1)$

(ii) " " " su $(0,+\infty)$

$\alpha \leq 0$ f NON è U.C. su $(0,1)$

Se $\alpha > 0$ f è est. per continuità su $[0,1]$ $\overset{HC}{\Longrightarrow}$ $\tilde{f}$ è U.C. su $[0,1]$

$(\exists \tilde{f} : [0,1] \to \mathbb{R}$ continua t.c. $\tilde{f}_{|(0,1)} = f)$

$\Downarrow$

f è U.C. su $(0,1)$

Per casa: per quali $\alpha > 0$ f è U.C. su $(0,+\infty)$?

Sugg: se $\alpha = 1$ $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{y \to 0^+} \frac{\sin y}{y} = 1$

$y = \frac{1}{x}$

$\sin \frac{1}{x} \sim \frac{1}{x}$ per $x \to +\infty$

$0 < \alpha < 1$ $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$

$f(x) \sim x^{\alpha - 1}$ si può dimostrare che è UC su $[0,+\infty)$ $\Leftrightarrow$ $0 < \alpha \leq 2$

Prop: (i) se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è continua e

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = l$, $\lim_{x \to -\infty} f(x) = m$ $l, m \in \mathbb{R}$

allora f è U.C.

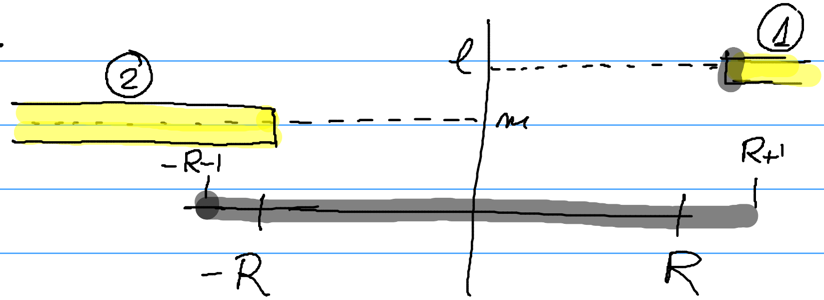
(ii) se $f_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ U.C. e $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è continua t.c.

$\lim_{x \to +\infty} (f(x) - f_0(x)) = \lim_{x \to -\infty} (f(x) - f_0(x)) = 0$ $\Rightarrow$ f è U.C.

<u>Dim (i)</u>: $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \ell \Rightarrow \forall \varepsilon>0\ \exists R_+>0 : \forall x>R_+ \quad |f(x)-\ell| < \varepsilon/2$

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = m \Rightarrow \forall \varepsilon>0\ \exists R_->0 : \forall x<-R_- \quad |f(x)-m| < \varepsilon/2$

$R = \max\{R_+, R_-, 1\}$



Fissato $\varepsilon>0$, prendo R come sopra e $\delta\in(0,1)$ che viene fuori dalla U.C. di $f|_{[-R-1,\,R+1]}$

$x,y\in\mathbb{R} \qquad |x-y|<\delta$

① $x,y>R \Rightarrow |f(x)-f(y)| \le |f(x)-\ell| + |\ell-f(y)| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2$

② $x,y<-R \Rightarrow |f(x)-f(y)|<\varepsilon$ stesso ragionam.

③ $x\in[-R,R]$, $|x-y|<\delta\le 1 \Rightarrow x,y\in[-R-1,R+1]$
$\Rightarrow |f(x)-f(y)| < \varepsilon$ per UC di $f|_{[-R-1,R+1]}$

(ii) per esercizio

Sugg: $\boxed{\text{Somma di funz U.C. è U.C.}}$

$f(x) = f_0(x) + \underbrace{f(x) - f_0(x)}_{\text{infinitesima}}$

MODULO di CONTINUITÀ (MdC)

$\omega : [0,+\infty] \longrightarrow [0,+\infty]$

- $\omega(0)=0$
- ω monotona crescente (deb)
- $\lim_{t\to 0^+} \omega(t) = 0$

$\Big]\ (*)$

$(C \subseteq \mathbb{R})$

<u>DEF</u>. (1) $f : C \longrightarrow \mathbb{R}$

Dico che ω è un MdC per f se

(i) ω soddisfa $(*)$

(ii) $|f(x)-f(y)| \leq \omega(|x-y|)$

(2) f ammette un MdC se esiste ω che è un MdC per f

<u>Esempi</u>: $\omega_L(t) = L\cdot t$ (con $L>0$)

$$\boxed{\begin{array}{c}\omega_L \text{ MdC per } f \\ \Updownarrow \\ f \text{ è } L\text{-Lip}\end{array}}$$

$\omega_{L\alpha}(t) = L\cdot t^\alpha$ $(\alpha\in(0,1))$ $\to$ funz. Hölderiane (p.es $f(x)=\sqrt{x}$)

<u>PROP</u>: $f : C \longrightarrow \mathbb{R}$ le seguenti condizioni sono equivalenti $(C \neq \emptyset)$

(i) f è U.C. (su C)

(ii) f ammette un MdC

<u>Dim</u>: $[\Longrightarrow]$ Definisco $\omega_f(t) := \sup\left\{ |f(x)-f(y)| : \begin{array}{l} x,y\in C \\ |x-y|\leq t\end{array}\right\}$

questo è un MdC per f
(anzi è ottimale)

$\omega_f \geq 0$ (basta prendere $x = y \in C$)

ω_f è monotona per per la monotonia del sup al crescere dell'insieme

ω_f è infinitesima?

$\boxed{\forall \varepsilon > 0}$ prendo δ dell'u.c. di f e ho che

$|x-y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon \quad \forall x, y \in C$

Se $t < \delta$ e $|x-y| \leq t \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$

$\omega_f(t) < \varepsilon \quad \forall t < \delta \Rightarrow \lim_{t \to 0} \omega_f(t) = 0$

Ovviamente $|f(x) - f(y)| \leq \omega_f(|x-y|)$ (per costruzione)

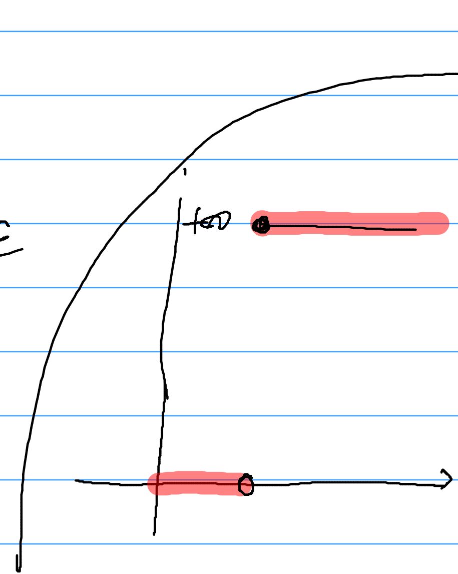
$|x-y| \doteq t$

($\Leftarrow$) $|f(x) - f(y)| \leq \omega(|x-y|)$

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \omega(t) < \varepsilon \ \forall t < \delta \Rightarrow$

$t = |x-y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \omega(t) < \varepsilon$

— o —



esempio

$C = \mathbb{N}$ $\qquad f : C \to \mathbb{R}$ $\qquad f(n) = n^2$

$$\omega(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t < 1 \\ +\infty & t \geq 1 \end{cases}$$

I intervallo

PROP: Se $f: I \longrightarrow \mathbb{R}$ è UC e ω_f è il suo MdC ottimale

Allora ω_f è sub-additivo

$$\omega_f(t+s) \leq \omega_f(t) + \omega_f(s)$$

ω crescente positiva, $\omega: [0,+\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$; ω infinitesima

LEMMA: Se ω è sub-additiva allora $\exists\, a, b$ t.c.

$$\omega(t) \leq at + b \qquad \forall t \geq 0$$

COR: se $f: I \longrightarrow \mathbb{R}$ è U.C. allora ha crescita sublineare

---

Dim: $s, t \geq 0$

$$\omega_f(s+t) = \sup \left\{ |f(x) - f(y)| : \boxed{\begin{matrix} |x-y| \leq s+t \\ x, y \in I \end{matrix}} \right\}$$

$$z = x - t\,\frac{x-y}{|x-y|}$$

$z \in I$ e inoltre

$$|x-z| = \left| t \cdot \frac{x-y}{|x-y|} \right| = t$$

$$|z-y| = \left| x-y - t \cdot \frac{x-y}{|x-y|} \right| = \left| \frac{(x-y)}{|x-y|} (|x-y| - t) \right| \leq s$$

$$|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - f(z)| + |f(z) - f(y)|$$

$$\leq \omega_f(t) + \omega_f(s)$$

subadd.

DIM (LEMMA): $\exists \delta_0 : \quad \omega(\delta_0) < 1$

$$\omega(n\delta_0) \leq n\,\omega(\delta_0) \quad \text{per sub-additività}$$

$$t \in [0,+\infty] \Rightarrow n\delta_0 \leq t < (n+1)\delta_0 \longrightarrow n \leq \frac{t}{\delta_0}$$

$$\omega(n\delta_0) \leq \omega(t) \leq \omega((n+1)\delta_0)$$

$$\omega(t) \leq (n+1)\,\omega(\delta_0) = n\,\omega(\delta_0) + \omega(\delta_0)$$

$$\leq t \underbrace{\frac{\omega(\delta_0)}{\delta_0}}_{a} + \underbrace{\omega(\delta_0)}_{b}$$

PROP: Se $f : [0,1[\longrightarrow \mathbb{R}$ è U.C. allora f è estendibile per cont a $[0,1]$

Dim: Basta vedere che $\exists \lim_{x \to 1^-} f(x)$

o.eq. $\exists\, \ell \in \mathbb{R} : \forall x_n \to 1 \quad \lim_{n\to\infty} f(x_n) = \ell$

Se $x_n \to 1^-$ $\quad f(x_n)$ è limitata (a meno di ssucc $\exists\, \ell$ t.c.) $\Rightarrow f(x_n) \longrightarrow \ell$ per $n \to \infty$

Se $y_n \to 1^-$ è un'altra succ. allora $f(y_n) = f(x_n) + \underbrace{f(y_n) - f(x_n)}_{\varepsilon(n)}$

$$|\varepsilon(n)| \le \omega_f(|y_n - x_n|) \longrightarrow 0$$

$$\lim_{n\to\infty} f(y_n) = \ell \quad \forall\, y_n$$

<u>OSS</u>: $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua (UC), ω è MdC per f

π part. di $[a,b]$

$$S(\pi,f) - s(\pi,f) = \sum_{k=1}^{n} |I_k| \underbrace{\left(f(\xi_k) - f(\eta_k)\right)}_{\le\, \omega(|I_k|)} \qquad \xi_k, \eta_k \in \bar{I}_k$$

$$\le \sum_{k=1}^{n} |I_k|\, \omega(|I_k|) \le (b-a)\,\omega(\delta_\pi)$$

se $\delta_\pi = \max\{|I_k|\}$

INTEGRALI VIA CALCOLO DIRETTO

$f(x) = x \qquad [a,b] \qquad \int_a^b f(x)\,dx$

$x_k = a + \frac{k}{n}(b-a)$ part. unif. π_n

$$S(\pi_n, f) = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{b-a}{n}\right)\left[a + \frac{k}{n}(b-a)\right]$$

$$= (b-a)a + \left(\frac{b-a}{n}\right)^2 \sum_{k=1}^{n} k$$

$\sum_{k=1}^{n} k \to \frac{n(n+1)}{2}$

$\xrightarrow{n \to +\infty} (b-a)a + \frac{1}{2}(b-a)^2$

$= \frac{1}{2}(b-a)(2a+b-a)$

$\frac{1}{2}(b^2-a^2)$

Es: fare lo stesso calcolo per

$f(x) = x^2 \qquad [0, \ell]$

* $f(x) = \frac{1}{x} \qquad [1, 2]$

Calcolare $\int_1^a \frac{1}{x^2}\,dx$ ←

Es: Se f è continua su $[a,b]$ $\quad f \geq 0$

e $f(x_0) > 0 \qquad (x_0 \in [a,b])$

allora $\int_a^b f(x)\,dx > 0$

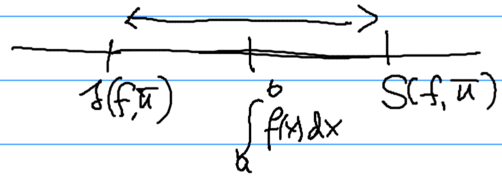
31 mar 2022

$$\int_1^2 \frac{1}{x}\,dx$$

$$0 \leq S(f,\pi) - s(f,\pi) \leq (b-a)\,\omega_f(\delta_n)$$

π : $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$

$\delta_n = \max(x_k - x_{k-1})$



$f(x) = \frac{1}{x}$

$[a,b] = [1,2]$

π_n part. uniforme

$$\left| \int_1^2 f(x)\,dx - s(f,\pi_n) \right| \leq \omega_f\left(\frac{1}{n}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

$x_k = 1 + \frac{k}{n}$

$I_k = \left[1 + \frac{k-1}{n},\ 1 + \frac{k}{n}\right]$

$|I_k| = \frac{1}{n}$

$$s(f,\pi_n) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{1+\frac{k}{n}} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$$

$h = n+k$

$$= \sum_{h=n+1}^{2n} \frac{1}{h} = \sum_{h=1}^{2n} \frac{1}{h} - \sum_{h=1}^{n} \frac{1}{h} = H(2n) - H(n)$$

$$H(n) = \log n + \gamma + \omega(n)$$

$\omega(n) = o(1)$ per $n \to \infty$

$$H(2n) = \log 2n + \gamma + \omega(2n)$$

$$H(2n) - H(n) = \log 2 + \underbrace{\omega(2n) - \omega(n)}_{o(1)} \xrightarrow{n\to+\infty} \log 2$$

Metodo "indiretto"

Usando il TFCI $f(x)=\frac{1}{x}$ $\qquad F'(x)=f(x)$ prendo $F(x)=\log x$

$$\int_1^2 \frac{1}{x}\,dx = F(2)-F(1)$$

CALCOLO DELLE "AREE" $\xleftrightarrow{\text{TFCI}}$ RICERCA DELLE PRIMITIVE

$\int_a^b f(x)\,dx$ $\qquad\qquad$ $\int f(x)\,dx$ ← insieme di tutte le primitive di f

← calcolo espliciti

esist. delle prim. di una funz. continua →

Esercizio: Se $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ continua

$a=x_0<x_1<\dots<x_n=b$ partizione di $[a,b]$

$c_k\in[x_{k-1},x_k]$ (arbitrari)

Allora

$$\Big|\int_a^b f(x)\,dx - \underbrace{\sum_{k=1}^{n}(x_k-x_{k-1})\,f(c_k)}_{\text{Somme di Cauchy}}\Big| \leq (b-a)\,\omega_f(\delta_\pi)$$

$$\delta_\pi = \min(x_k-x_{k-1})$$

METODI DI INTEGRAZIONE

- INTEGR PER PARTI
- " PER SOSTITUZIONE
- " DI FUNZ. RAZIONALI

—— o ——

$dy = -\sin x\, dx$

$y = \cos x$

$$\int \sin^5 x\, dx = \int (\sin^2 x)^2 \sin x\, dx$$

$$= \int (1-\cos^2 x)^2 \underbrace{\sin x\, dx}_{-dy} = -\int (1-y^2)^2\, dy$$

$$= -\int [1-2y^2+y^4]\, dy = -\left[y - \frac{2}{3}y^3 + \frac{y^5}{5}\right] + c$$

$\boxed{y=\cos x}$

$$= -\cos x + \frac{2}{3}\cos^3 x - \frac{\cos^5 x}{5} + c$$

—— o ——

$$\int \frac{1}{\sinh(x)}\, dx = \int \frac{2e^x}{e^{2x}-1}\, dx \qquad \sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$y = e^x \qquad dy = e^x\, dx$

$$= \int \frac{2\, dy}{y^2-1} = \int \left[\frac{1}{y-1} - \frac{1}{y+1}\right] dy \qquad \frac{2}{y^2-1} = \frac{1}{y-1} - \frac{1}{y+1}$$

$$= \log|y-1| - \log|y+1| + c = \log\left|\frac{y-1}{y+1}\right| + c = \log\left|\frac{e^x-1}{e^x+1}\right| + c$$

$$x = e^y \qquad dx = e^y dy$$

$$\int \log^3 x \, dx \overset{y = \log x}{=} \int y^3 e^y \, dy = p(y) e^y = (y^3 - 3y^2 + 6y + 6) e^y + c$$

$$p(y) = y^3 + by^2 + cy + d$$

$$p'(y) = 3y^2 + 2by + c$$

$$[p(y) e^y]' = [p'(y) + p(y)] e^y$$

$$p'(y) + p(y) = y^3 = y^3 + \underline{(b+3)} y^2 + \underline{(c+2b)} y + \underline{c+d}$$

$$b = -3 \qquad c = 6 \qquad d = -6$$

$$\int \log^3 x \, dx = x(\log^3 x - 3 \log^2 x + 6 \log x - 6) + C$$

$x > 0$

—— o ——

$$\int \frac{1}{x \log x} dx$$

$$F'(x) = \frac{1}{x} \qquad F(x) = \log x$$

$$G(x) = \frac{1}{\log x} \qquad G'(x) = -\frac{1}{x \log^2 x}$$

$$\int \frac{1}{x \log x} dx = \log(x) \frac{1}{\log x} - \int \log x \left(-\frac{1}{x \log^2 x} \right)$$

$$= 1 + \int \frac{1}{x \log x} dx$$

$$\Downarrow$$

$$\cancel{0 = 1}$$

$$x = e^y$$

$$\log x = y$$

$$dx = e^y dy$$

$$\int \sin \log x \, dx$$

$$\parallel$$

$$\int \sin y \, e^y \, dy = \sin y \, e^y + \int (-\cos y) e^y \, dy$$

$$= \sin y \, e^y - \cos y \, e^y - \int \sin y \, e^y \, dy$$

$$\int \sin y \, e^y \, dy = \frac{1}{2}(\sin y - \cos y) e^y + C$$

$$\int \sin \log x \, dx = \frac{1}{2}(\sin \log x - \cos \log x) x + C$$

— o —

$$\int \frac{1}{2 \sin x + \sin x \cos x} dx = (*)$$

$$\parallel$$

$$-\int \frac{(-\sin x)}{(1-\cos^2 x)\cdot(2+\cos x)} dx$$

$$\parallel \qquad y = \cos x, \quad dy = -\sin x \, dx$$

$$+\int \frac{dy}{(y^2-1)(2+y)}$$

$$\frac{1}{2S + SC}$$

$$R(\sin x, \cos x)$$

$$t = \tan \frac{x}{2}$$

$$x = 2 \arctan t$$

$$dx = \frac{2}{1+t^2}$$

$$\begin{cases} \sin x = \dfrac{2t}{1+t^2} \\ \cos x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2} \end{cases}$$

$\exists A, B, C$ t.c.

$$\frac{1}{(y+1)(y-1)(2+y)} = \frac{A}{y+1} + \frac{B}{y-1} + \frac{C}{2+y} \qquad \forall y \notin \{1,-1,-2\}$$

$$1 = A(y-1)(2+y) + B(y+1)(2+y) + C(y+1)(y-1)$$

$$1 = B\cdot 2\cdot 3 \implies B = 1/6 \qquad \leftarrow y=1$$

$$1 = A(-2) \implies A = -\frac{1}{2} \qquad y=-1$$

$$1 = C\cdot 3 \implies C = \frac{1}{3} \qquad y=-2$$

$$\frac{1}{(y^2-1)(2+y)} = -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{y+1} + \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{y-1} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2+y}$$

$$\int \frac{1}{(y^2-1)(2+y)}\,dy = -\frac{1}{2}\log|y+1| + \frac{1}{6}\log|y-1| + \frac{1}{3}\log|2+y| + C$$

$$(*) = -\frac{1}{2}\log|\cos x+1| + \frac{1}{6}\log|\cos x-1| + \frac{1}{3}\log|2+\cos x| + C$$

——— o ———

$$\boxed{I = \int \frac{\tan x}{\cos^2 x}\, dx}$$

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \; ; \quad (\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$-\int \frac{-\sin x}{\cos^3 x}\, dx \overset{y = \cos x}{=} -\int \frac{dy}{y^3} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{y^2} + c$$

$$\boxed{I = \frac{1}{2\cos^2 x} + c}$$

$$I = \int \tan x \,(\tan x)'\, dx \overset{y = \tan x}{=} \int y\, dy = \frac{y^2}{2} + c$$

$$\boxed{I = \frac{1}{2}\tan^2 x + c}$$

Sono entrambi giusti!!

OSS: $\frac{1}{2}\tan^2 x - \frac{1}{2\cos^2 x} = \frac{1}{2}\cdot\frac{\sin^2 x - 1}{\cos^2 x} = -\frac{1}{2}$

costante!

$$H(x) = \int_{\sin x}^{\cos x} \sqrt{1 - t^2}\, dt$$

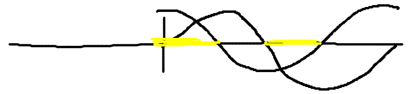
→ studiare $H(x)$ senza calcolare esplicit. l'integr.

$H(\pi/4) = 0$

Se $F'(y) = \sqrt{1 - y^2}$

$H(x) = F(\cos x) - F(\sin x)$

$$H'(x) = F'(\cos x)\cdot(-\sin x) - F'(\sin x)\cos x$$
$$= \sqrt{1 - \cos^2 x}\,(-\sin x) - \sqrt{1 - \sin^2 x}\,\cos x$$



$$= -\left(|\sin x|\sin x + |\cos x|\cos x\right)$$

oss: se $x \in [0, \pi/2]$ $H'(x) \equiv -1$

se $x \in [\pi, \frac{3}{2}\pi]$ $H'(x) \equiv 1$

Es_1 per casa: determinare intervalli di crescenza e decrescenza.

Es_2: Fare il calcolo esplicito (scrivendo l'espressione analitica di $F(\cdot)$)

— o —

$$F(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t}\,dt \qquad \lim_{x \to 0} \frac{2F(x) - F(2x)}{x - F(x)}$$

$$\sin t = t - \frac{t^3}{6} + R(t) \qquad R(t) = O(t^5)$$

$$|R(t)| \leq C|t|^5 \quad \text{per } t \to 0$$

$$\frac{\sin t}{t} = 1 - \frac{t^2}{6} + r(t) \qquad r(t) = O(t^4) \quad \text{per } t \to 0$$

$$\int_0^x \frac{\sin t}{t}\,dt = x - \frac{x^3}{18} + \int_0^x r(t)\,dt$$

$$\left|\int_0^x r(t)\,dt\right| \leq \left|\int_0^x |r(t)|\,dt\right| \leq C\left|\int_0^x t^4\,dt\right| \leq C' x^5$$

$$F(x) = x - \frac{x^3}{18} + O(x^5) \quad \text{per } x \to 0$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{2f(x) - f(2x)}{x - f(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\cancel{2x} - \frac{2}{18}x^3 \cancel{-2x} + \frac{(2x)^3}{18} + o(x^5)}{\frac{x^3}{18} + o(x^5)}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{2}{18} + \frac{8}{18} + o(x^2)}{\frac{1}{18} + o(x^2)} = 6$$

Per casa:

Calcolare $\displaystyle\int \frac{1}{1+\sqrt{1+x^2}}\,dx$

$\boxed{1 \text{ apr } 2022}$

$D = (0,+\infty) \setminus \{1\}$

$$\int \frac{1}{x \log x} \, dx \qquad \begin{cases} y = \log x \\ dy = \frac{dx}{x} \end{cases}$$

$$\| $$

$$\int \frac{1}{y} \, dy = \log|y| + c = \log|\log x|$$

Riprend es volta scorsa

$$h(x) = F(\cos x) - F(\sin x) \qquad F = \int \sqrt{1-t^2} \, dt$$

$-1 \leq t \leq 1$

$-\pi/2 \leq x \leq \pi/2$

$t = \sin x$

$dt = \cos x \, dx$

$$\int \sqrt{1-t^2} \, d = \int \cos x \cdot \cos x \, dx = \int \cos^2 x \, dx$$

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$$

$$= \frac{1}{2} \int [1 + \cos 2x] \, dx = \frac{1}{2} \left[x + \frac{\sin 2x}{2} \right] + c = \frac{1}{2} \left[x + \sin x \cos x \right] + c = \frac{1}{2} \left[\arcsin t + t\sqrt{1-t^2} \right] + c$$

calcolo di ieri

$$I = \int \frac{dx}{\sin x\,(2+\cos x)} \quad \left(= -\frac{1}{2}\log(1+\cos x) + \frac{1}{6}\log(1-\cos x) + \frac{1}{3}\log(2+\cos x) \right)$$

$$\begin{cases} t = \tan\frac{x}{2} \iff x = 2\arctan t \\ \quad dx = \frac{2}{1+t^2}\,dt \\ \sin x = \frac{2t}{t^2+1} \\ \cos x = \frac{1-t^2}{t^2+1} \end{cases}$$

$$= \int \frac{1}{\frac{\cancel{2}\,t}{\cancel{1+t^2}}\left(2+\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)} \cdot \overbrace{\frac{\cancel{2}}{\cancel{1+t^2}}\,dt}^{dx}$$

$$= \int \frac{dt}{t \cdot \frac{2+2t^2+1-t^2}{1+t^2}} = \int \frac{1+t^2}{t(3+t^2)}\,dt = (*)$$

$$\frac{1+t^2}{t(3+t^2)} = \frac{A}{t} + \frac{Bt+C}{3+t^2} = \frac{A(3+t^2)+Bt^2+Ct}{t(3+t^2)}$$

$C=0$

$A = 1/3$

$B = 2/3$

$$= \frac{1}{3}\left[\frac{1}{t} + \frac{2t}{3+t^2}\right]$$

$$= \frac{1}{3}\int\left[\frac{1}{t} + \frac{2t}{3+t^2}\right]dt = \frac{1}{3}\left[\log|t| + \log|3+t^2|\right] + c = \frac{1}{3}\left[\log\left|\tan\frac{x}{2}\right| + \log\left|3+\tan^2\frac{x}{2}\right|\right] + c$$

OSS $(*)$ $$\int \frac{1+t^2}{3t+t^3}\,dt = \frac{1}{3}\log(3t+t^3) + c$$

$\frac{1}{3}\frac{N'}{N}$ con $N = 3t+t^3$

$$\boxed{\begin{array}{c} dx = \cosh(t)\,dt \\ x = \sinh(t) \end{array}}$$

$$R\left(x, \sqrt{x^2+c}\right) \qquad c = 1 \quad c > 0$$

$$\int \frac{dx}{1+\sqrt{1+x^2}} = \int \frac{\cosh(t)\,dt}{1+\cosh(t)}$$

$$x = \sqrt{c}\sinh(t)$$

$$\cosh^2(t) - \sinh^2(t) = 1$$

$$\begin{array}{c} e^t = y \\ t = \log y \qquad dt = \frac{dy}{y} \end{array}$$

$$= \int \frac{\frac{1}{2}(e^t + e^{-t})}{1+\frac{1}{2}(e^t + e^{-t})}\,dt = \int \frac{\left(y+\frac{1}{y}\right)}{2+\left(y+\frac{1}{y}\right)} \cdot \frac{dy}{y}$$

$$= \int \frac{y^2+1}{2y+y^2+1} \cdot \frac{dy}{y} = \int \frac{y^2+1}{(y+1)^2 \cdot y}\,dy = (*)$$

$$\frac{y^2+1}{(y+1)^2 y} = \frac{1}{y} - \frac{2}{(y+1)^2}$$

(aggiungo e tolgo $2y$ al numeratore)

$$(*) = \int \left[\frac{1}{y} - \frac{2}{(y+1)^2}\right] dy = \log|y| + \frac{2}{y+1} =$$

$$x = \frac{e^t - e^{-t}}{2}$$

$$y = e^t$$

$$\boxed{x = \frac{1}{2}\left(y - \frac{1}{y}\right)}$$

@ $\rightsquigarrow$ $2xy = y^2 - 1$

$y^2 - 2xy - 1 = 0$

$y_{\pm} = x + \sqrt{x^2+1}$

$y > 0!$

$$\circledast = \log\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) + \frac{2}{1 + x + \sqrt{x^2+1}} + c$$

$$\int \frac{1}{1+\sqrt{1+x}}\,dx =$$

$y = \sqrt{1+x}$

$y^2 = 1+x$

$2y\,dy = dx$

$$= \int \frac{2y\,dy}{1+y} = \int \left[2 - \frac{2}{1+y}\right] dy = 2y - 2\log(1+y) + c$$

$$= 2\sqrt{1+x} - 2\log\left(1+\sqrt{1+x}\right)$$

$$\int \frac{dx}{1+\sin x} = \qquad t=\tan\left(\frac{x}{2}\right) \qquad \sin x = \frac{2t}{1+t^2}$$

$$= \int \frac{1}{1+\frac{2t}{1+t^2}} \cdot \frac{2}{1+t^2}\,dt$$

$$= \int \frac{2}{(1+t)^2}\,dt = -\frac{2}{1+t} + C = -\frac{2}{1+\tan\left(\frac{x}{2}\right)} + C$$

(Scomposizione)

Metodo di Hermite

$P, Q \in \mathbb{R}[x] \qquad gr(P) < gr(Q)$

incognite

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P^*(x)}{Q^*(x)} + \frac{d}{dx}\left[\frac{\hat{P}(x)}{\hat{Q}(x)}\right] \qquad \begin{cases} gr\,P^* < gr\,Q^* \\ gr\,\hat{P} < gr\,\hat{Q} \end{cases}$$

con $Q^*(x)$ con le stesse radici di Q ma tutte semplici

$\hat{Q}(x)$ ha le stesse radici multiple di Q ma con molt diminuita di 1

Esempio:
$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{x^4 - x^3 + 2}{x^3 (x-1)^2}$$

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P^*(x)}{x(x-1)} + \frac{d}{dx}\left[\frac{\hat{P}(x)}{x^2(x-1)}\right] =$$

$gr(P^*) = 1$ $\qquad$ $gr(\hat{P}) = 2$

$$= \left(\frac{a_0}{x} + \frac{a_1}{x-1}\right) + \frac{d}{dx}\left[\frac{bx^2 + cx + d}{x^2(x-1)}\right] = (*)$$

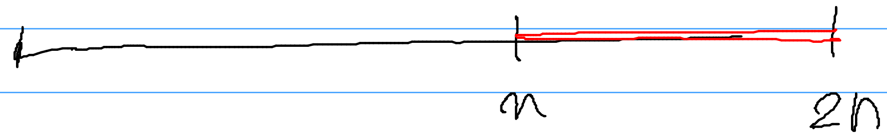
Es per casa: derivare e calcolare a_0, a_1, b, c, d in modo l'espressione (*) coincida con P/Q dato inizialm.

$$\int P/Q \, dx = a_0 \log|x| + a_1 \log|x-1| + \frac{bx^2 + cx + d}{x^2(x-1)} + \text{cost}$$

esercizio(*): fare lo stesso integrale col metodo classico visto a lezione

$\sin \frac{1}{t} \sim \frac{1}{t}$ per $t \to +\infty$

$$\lim_{n \to \infty} \int_n^{2n} \sin\left(\frac{1}{t}\right) dt$$



$\frac{1}{t} = y$

$$\int \sin\left(\frac{1}{t}\right) dt = -\int \sin(y) \frac{dy}{y^2}$$

non ha espr. esplicita in termini di funz. elementari

$$\sin \frac{1}{t} = \frac{1}{t} + \omega\left(\frac{1}{t}\right)$$

con $\omega\left(\frac{1}{t}\right) = O\left(\frac{1}{t^3}\right)$ per $t \to +\infty$

$$\boxed{\exists R, C : \left|\omega\left(\frac{1}{t}\right)\right| \leq C \frac{1}{|t^3|} \text{ su } [R, +\infty)}$$

se $n \geq R$

$$\int_n^{2n} \sin \frac{1}{t}\, dt = \int_n^{2n} \frac{1}{t}\, dt + \int_n^{2n} \omega(1/t)$$

$$\left| \int_n^{2n} \omega\left(\frac{1}{t}\right) dt \right| \leq n \cdot \frac{C}{n^3} \leq \frac{C}{n^2}$$

$$= [\log 2n - \log n] + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \longrightarrow \log 2$$

Sia $f(x) = \displaystyle\int_x^{x+\sin^2 x} e^{-t^2}\,dt$

Mostrare che f ammette massimo globale su $\mathbb{R}$

$$\boxed{\left\{\begin{array}{l} f \geq 0 \\ \text{continua} \\ \lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0 \end{array}\right. \Downarrow \; f \text{ ammette massimo}}$$

$f(0) = 0 \qquad f(k\pi) = 0 \quad \forall k \in \mathbb{Z}$

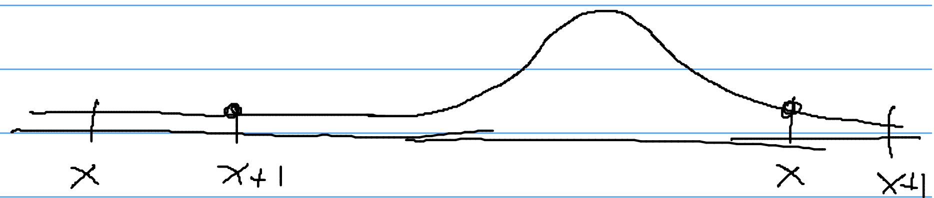
$x \leq x + \sin^2 x$ e $e^{-t^2} > 0 \Rightarrow f(x) \geq 0$

$x \geq R > 0$

$$0 \leq f(x) = \int_x^{x+\sin^2 x} e^{-t^2}\,dt \leq \int_x^{x+1} e^{-t^2}\,dt \overset{x>0}{\leq} e^{-x^2}$$

$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$

$\Rightarrow f$ ammette max



TFCI $\Longrightarrow$ $\exists F \in C^1(\mathbb{R})$ t.c.

$$F'(t) = e^{-t^2}$$

$$f(x) = F(x+\sin^2 x) - F(x)$$

<u>OSS</u>: f è continua anzi, è derivabile

$$f'(x) = F'(x+\sin^2 x)\,(1+2\sin x\cos x) - F'(x)$$

$$= e^{-(x+\sin^2 x)^2}(1+2\sin x\cos x) - e^{-x^2}$$

TFCI

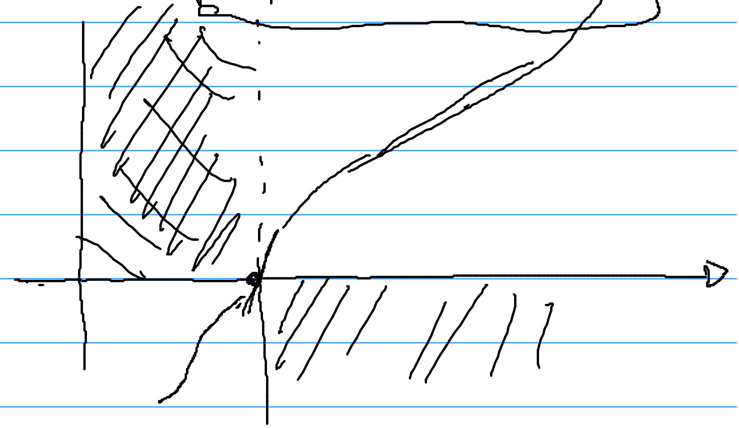
$$F(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt$$

$$F'(x) = f(x)$$

Sia $F(x) = \displaystyle\int_1^x \frac{e^t}{\sqrt{t}}\,dt$

Studiare F per $(x>0)$

$F'(x) = \dfrac{e^x}{\sqrt{x}} > 0$ $\qquad F''(x)$



$\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = +\infty$ (verificarlo, e dare una stima asintotica

$\lim\limits_{x\to 0^+} F(x) = \ell \in [-\infty, 0)$ è finito per $x \to 0$

Il limite è finito:

$x<1$

$$0 \geq \int_1^x \frac{e^t}{\sqrt{t}}\,dt = -\int_x^1 \frac{e^t}{\sqrt{t}}\,dt$$

se $t \in [x,1]$ $e^t \leq e^1$

$$0 \leq \int_x^1 \frac{e^t}{\sqrt{t}}\,dt \leq e\int_x^1 \frac{1}{\sqrt{t}}\,dt = e \cdot 2\sqrt{t}\Big]_x^1 = 2e - 2e\sqrt{x} \leq 2e$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \ell \geq -2e$$

Per casa: Studiare la funzione $F(x) = (1-x^2)\int_0^x e^{-t^2}\,dt$

7 apr 2022

INTEGRALI IMPROPRI

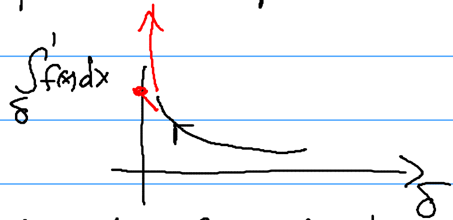
$$\int_0^1 \frac{dx}{\log(1+x)}$$ dire se l'integrale è convergente

$$f(x) = \frac{1}{\log(1+x)}$$

- non è limitata in un int di 0
- è integrabile su $[\delta, 1]$ $\forall \delta > 0$

$$\lim_{\delta \to 0^+} \int_\delta^1 \frac{dx}{\log(1+x)}$$

- $f(x) \geq 0$ per $x > 0$



$\log(1+x) \sim x$ per $x \to 0$

$\frac{1}{\log(1+x)} \sim \frac{1}{x}$ per $x \to 0$ per il crit. del confronto asintotico

$\int_0^1 \frac{1}{\log(1+x)} dx$ converge $\Longleftrightarrow$ $\int_0^1 \frac{1}{x} dx$ converge

$$\lim_{\delta \to 0^+} \int_\delta^1 \frac{1}{x} dx = \lim_{\delta \to 0} (-\log \delta) = +\infty$$

Questo integrale NON converge

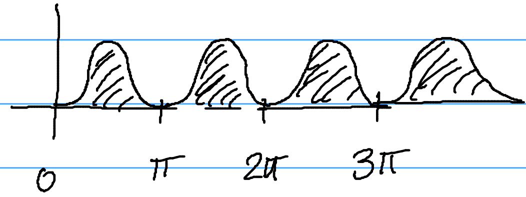
PROP: f_1, f_0 funz positive; integr $[\delta, 1]$ $\forall \delta > 0$

$$\boxed{\begin{array}{l} f_0(x) = \frac{1}{x} \\ f_1(x) = \frac{1}{\log(1+x)} \end{array}}$$

$\lim_{x \to 0} \frac{f_1(x)}{f_0(x)} = 1$ allora $\lim_{\delta \to 0} \int_\delta^1 f_i(x) dx$

o è finito per entrambi, o è ∞ infinito per entrambi

$$\int_0^{+\infty} \sin^2 x \, dx$$



$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{n} \sin^2 x \, dx = +\infty$$

—— o ——

$$I = \int_0^{+\infty} \underbrace{\sin(x^2)}_{f(x)} \, dx$$

converge o no?

$\lim_{x\to+\infty} f(x)$ non esiste

$y = x^2 \qquad x = \sqrt{y} \qquad dx = \frac{dy}{2\sqrt{y}}$

$$2I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin y}{\sqrt{y}} \, dy$$

$$\lim_{x\to+\infty} \int_0^{x} \frac{\sin y}{\sqrt{y}} \, dy$$

$x = n\pi$

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{n\pi} \frac{\sin y}{\sqrt{y}} \, dy$$

$\sin(k\pi + x) = (-1)^k \sin x$

$$I_n = \int_0^{n\pi} \frac{\sin y}{\sqrt{y}} \, dy = \sum_{k=1}^{n} \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} \frac{\sin y}{\sqrt{y}} = \sum_{k=1}^{n} \int_0^{\pi} \frac{\sin((k-1)\pi + x)}{\sqrt{(k-1)\pi + x}} \, dx$$

$y = (k-1)\pi + x$

$$= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \underbrace{\int_0^{\pi} \frac{\sin(x)}{\sqrt{(k-1)\pi + x}} \, dx}_{a_k}$$

$a_k \geq 0 \qquad a_k \searrow$

Questa serie converge

$$x = n\pi + x' \quad \text{con} \quad x' \in [0,\pi)$$

$$\int_0^x \frac{\sin y}{\sqrt{y}}\,dy = \int_0^{n\pi} \frac{\sin y}{\sqrt{y}}\,dy + \boxed{\int_{n\pi}^{n\pi+x'} \frac{\sin y}{\sqrt{y}}}\ R(x)$$

$$= I_n + R(x) \qquad x \to 0$$

$$R(x) \to 0$$

$$|R(x)| \leq \pi \frac{1}{\sqrt{n\pi}} \qquad I_n \to \sum_1^{+\infty} (-1)^k a_k$$

Es. per casa: dire se esiste finito $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(\pi t)}{\log t}\,dt$

$$\int_0^1 \log^2 x \, dx \qquad \text{Coverge?}$$

$$y = -\log x$$

$$x = e^{-y} \qquad dx = -e^{-y}\,dy$$

$$= \int_{\infty}^{0} y^2 (-e^{-y})\,dy = \int_0^{\infty} y^2 e^{-y}\,dy \leftarrow \text{Converge (per parti)}$$

$$I_m = \int_0^{+\infty} t^m e^{-t}\, dt$$

$(m=0)$ $$I_0 = \int_0^{+\infty} e^{-t}\, dt = 1$$

$(m\geq 1)$ $$I_m = \Big[t^m \left(-e^{-t}\right)\Big]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} m\, t^{m-1} \left(+e^{-t}\right) dt$$

$$= 0 + m\, I_{m-1}$$

$$\begin{cases} I_0 = 1 \\ I_m = m \cdot I_{m-1} \end{cases} \qquad I_m = m!$$

$(\lambda > 0)$ $$\int_0^{+\infty} t^m e^{-\lambda t}\, dt = \frac{1}{\lambda^m} \int_0^{+\infty} y^m e^{-y} \frac{dy}{\lambda} = \frac{m!}{\lambda^{m+1}} \qquad (*)$$

$$\boxed{\begin{array}{ll} \lambda t = y & t^m = \dfrac{y^m}{\lambda^m} \\ & dt = \dfrac{dy}{\lambda} \end{array}}$$

Dire per quali $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ converge l'integrale

$$I(\alpha,\beta) = \int_0^1 t^\alpha \left(\log \frac{1}{t}\right)^\beta dt$$

problemi: $\nearrow$ a zero, se $\alpha<0$; $\searrow$ a 1, se $\beta<0$

$y = \log \frac{1}{t}$ $\qquad t = e^{-y}$, $\quad dt = -e^{-y} dy$

problemi a 0 e a $+\infty$

$$I(\alpha,\beta) = \int_\infty^0 e^{-\alpha y} y^\beta (-e^{-y})\, dy = \boxed{\int_0^\infty y^\beta e^{-(\alpha+1)y} dy}$$

$\int_1^{+\infty} y^\beta e^{-(\alpha+1)y} dy$ converge $\Leftrightarrow$ $\alpha+1>0$

basta confrontarlo con $\int_0^{+\infty} y^m e^{-(\alpha+1)y} dy$ con $m \geq \beta$ $\boxed{\text{vedi } (*)}$

$0 \leq y^\beta \leq y^m$

$\int_0^1 y^\beta e^{-(\alpha+1)y} dy$ converge $\Leftrightarrow$ $\beta > -1$ (per il crit. del confronto asintotico)

$$\boxed{I(\alpha,\beta) \text{ converge} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha > -1 \\ \beta > -1 \end{cases}}$$

In alcuni casi si può fare il calcolo esplicito

$(*)$ $$I(\alpha, m) = \int_0^{+\infty} y^m e^{-(\alpha+1)y} dy = \frac{m!}{(\alpha+1)^{m+1}}$$

Γ di Eulero

DEF: $$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t}\, dt$$

✓ (a) l'integrale è finito $\forall x > 0$ (vedi es. precedente)

✓ (b) $\Gamma(x+1) = x\,\Gamma(x)$ (int. per parti)

✓ (c) $\Gamma(n) = (n-1)!$

⊛ (d) Γ è una funz C^∞ (nella x)

LEMMA: Posto
$$\Gamma_n(x) \doteq \int_0^{+\infty} (\log t)^n\, t^{x-1} e^{-t}\, dt$$

- (a) Γ_n è ASSOLUTAMENTE convergente $\forall n \in \mathbb{N}$ $\forall x > 0$
- (b) $\boxed{\Gamma_n(x+h) = \Gamma_n(x) + h\cdot \Gamma_{n+1}(x) + o(h) \quad \text{per } h \to 0 \quad (x>0)}$

(c) $\Gamma_n'(x) = \Gamma_{n+1}(x)$ (da (b), usando la definiz. di derivata)

(d) $\Gamma_n(x) = \left(\Gamma_0(x)\right)^{(n)}$ ← derivata n-esima (per induzione da (c))

OSS: $\Gamma_0(x) = \Gamma(x)$

Dim: (a) convergenza assoluta

$$\int_0^{+\infty} |\log t|^m \, t^{x-1} e^{-t} \, dt \quad \begin{cases} \int_0^1 \\ \int_1^{+\infty} \end{cases}$$

per ☆

$$(a_0) \quad \int_0^1 \left(\log\frac{1}{t}\right)^m t^{x-1} e^{-t} \, dt \underset{\boxed{e^{-t} \leq 1}}{\leq} \int_0^1 \left(\log\frac{1}{t}\right)^m t^{x-1} \, dt = \frac{m!}{x^{m+1}}$$

$$(a_1) \quad \int_1^{+\infty} (\log t)^m \, t^{x-1} e^{-t} \, dt \underset{0 \leq \log t \leq t}{\leq} \int_1^{+\infty} t^{x+m-1} e^{-t} \, dt \leq \Gamma(x+m)$$

a

(b) Fisso $x > 0$, $\delta \in (0, x)$, $|h| \leq \delta$

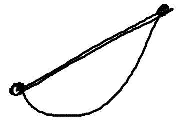
$$R(h) = \Gamma_m(x+h) - \Gamma_m(x) - h\,\Gamma_{m+1}(x) \qquad \text{tesi: } R(h) = o(h) \text{ per } h \to 0$$

$$= \int_0^{+\infty} (\log t)^m \, t^{x-1} e^{-t} \underbrace{\left[t^h - 1 - h \log t\right]} dt$$

$$\left[\begin{array}{l} g(s) = t^s \\ g'(s) = (\log t)\, t^s \\ g''(s) = (\log t)^2\, t^s \end{array}\right. \qquad g(h) = g(0) + h\,g'(0) + \frac{h^2}{2} g''(\xi)$$

sviluppo di Taylor con resto di Lagrange

$$\left[t^h - 1 - h \log t\right] = \frac{h^2}{2} (\log t)^2 \, t^\xi \quad \text{con } |\xi| \leq \delta$$



t^s è convessa

$$\max_{|s|\le\delta} t^s = \max(t^{\delta}, t^{-\delta}) \le t^{\delta} + t^{-\delta}$$

$$0 \le t^h - 1 - h\log t \le \frac{h^2}{2}(\log t)^2\,(t^{\delta}+t^{-\delta})$$

$$|R(h)| \le \frac{h^2}{2}\int_0^{+\infty} |\log t|^{m+2}\, t^{x-1}\, e^{-t}\,(t^{\delta}+t^{-\delta})\,dt = \frac{h^2}{2}\left(J^+ + J^-\right) \text{ con}$$

$$J^{\pm} = \int_0^{+\infty} |\log t|^{m+2}\, t^{x\pm\delta-1}\, e^{-t}\,dt < +\infty \quad \text{se } 0<\delta<x$$

Quindi $|R(h)| \le C h^2$ cioè $R(h)$ è $O(h^2)$ e quindi è $o(h)$

Per casa: Mostrare che se f continua su $[1, +\infty)$

f decrescente $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$

Allora esiste $\int_1^{+\infty} f(x) \sin x \, dx$

[Sugg: procedere come per $\int_1^{\infty} \frac{\sin y}{\sqrt{y}} \, dy$)

Dire se converge

$$\int_{-\infty}^{-1} \frac{e^x}{x^2} \, dx = \int_{\infty}^{1} \frac{e^{-y}}{y^2} (-dy) = \int_1^{\infty} \frac{e^{-y}}{y^2} \, dy \leq \int_1^{\infty} e^{-y} \, dy$$

$y = -x$

Dire se converge

$$\int_0^1 x^{\log x} \, dx = \int_0^1 e^{\log^2 x} \, dx$$

$x^{\log x} = e^{\log^2 x}$

$$\boxed{\begin{array}{l} x \to 0^+ \\ \log^2 x \to \infty \end{array}}$$

$\log x = -y$

$dx = -e^{-y} dy$

$$= \int_0^{\infty} e^{y^2} e^{-y} dy$$

$$= \int_0^{+\infty} e^{y^2 - y} \, dy \quad \text{non converge}$$

Per caso:

$$\int_0^2 \frac{e^{\sqrt{x}} - 1}{\sin x} \, dx$$

dire se converge o diverge

14 apr 2022

FORMULA DI TAYLOR CON RESTO INTEGRALE

Prop: Se f è derivabile n volte e $f^{(n)}$ è integrabile allora

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \underbrace{\boxed{\int_{x_0}^{x} \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(t)\, dt}}_{R_n} \qquad (T_n)$$

Dim: (Per induzione)

$(n=1)$
$$f(x) = f(x_0) + \int_{x_0}^{x} f'(t)\, dt \qquad \text{(Vera per TFCI)}$$

Oss: $\frac{d}{dt}\left[-\frac{(x-t)^n}{n!}\right] = \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}$

Suppongo la formula (T_n) vera e scrivo

$$R_n = \int_{x_0}^{x} \underbrace{\boxed{\frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}}}_{\text{integro}} \underbrace{f^{(n)}(t)}_{\text{derivo}}\, dt = \left[-\frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n)}(t)\right]_{x_0}^{x} + \int_{x_0}^{x} \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\, dt$$

$$= \frac{(x-x_0)^n}{n!} f^{(n)}(x_0) + R_{n+1}$$

(T_n) vera $\Longrightarrow$ (T_{n+1}) è vera

Confronto con l'espressione di R_n con Lagrange

$\xi \in [x_0, x]$ $\qquad f^{(n)}(\xi)\frac{(x-x_0)^n}{n!} = R_n = \int_{x_0}^{x} \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(t)\, dt$

$P_n(t)$

$$f^{(n)}(\xi) = \left[\frac{(x-x_0)^n}{n!}\right]^{-1} \int_{x_0}^{x} f^{(n)}(t) \, \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} \, dt$$

$P_n(t) \geq 0$

$$f^{(n)}(\xi) = \int_{x_0}^{x} f^{(n)}(t) \quad P_n(t) \, dt \qquad \text{con} \qquad \int_{x_0}^{x} P_n(t) \, dt = 1$$

<u>Oss</u>: Se $f^{(n)}$ è continua posso dimostrare la formula di Taylor con resto di Lagrange a partire da quella con resto integrale

Infatti osservo che $m_n \int_{x_0}^{x} P_n(t)\,dt \leq \int_{x_0}^{x} f^{(n)}(t) \, P_n(t) \, dt \leq M_n \underbrace{\int_{x_0}^{x} P_n(t) \, dt}_{1}$ $\qquad M_n = \max_{[x_0,x]} f^{(n)}$, $\quad m_n = \min_{[x_0,x]} f^{(n)}$

se $f^{(n)}$ continua $\Rightarrow \exists \, \xi \in [x_0, x]$ t.c. $f^{(n)}(\xi) = \int_{x_0}^{x} f^{(n)}(t) \, P_n(t) \, dt$

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x-x_0)^k + \int_{x_0}^{x} \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)} \, dt = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x-x_0)^k + \frac{(x-x_0)^n}{n!} \boxed{\int_{x_0}^{x} f^{(n)}(t) \, P_n(t) \, dt}$$

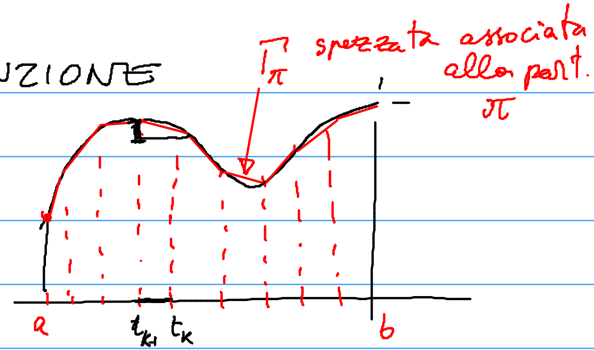
La formula col resto integrale produce stime più precise di quelle che si ottengono col resto di Lagrange.

LUNGHEZZA DEL GRAFICO DI UNA FUNZIONE

$f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$

$a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$

$\uparrow \pi$



$$\ell(\Gamma_\pi) = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{(t_k - t_{k-1})^2 + (f(t_k) - f(t_{k-1}))^2}$$

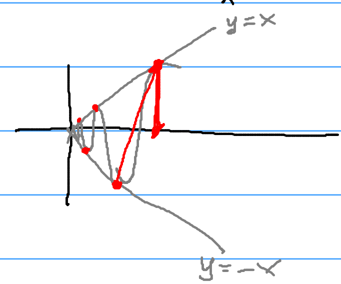
$\Gamma_f \doteq \{(x,y) : y = f(x) \quad a \le x \le b\}$

$$\ell(\Gamma) = \sup_\pi \ell(\Gamma_\pi)$$

OSS: Anche se f è continua $\ell(\Gamma_f)$ può valere $+\infty$

Es: $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x = 0 \\ x \sin \frac{1}{x} & \text{se } x \in (0,1] \end{cases}$ $\quad f$ è continua

$\ell(\Gamma_f) = +\infty$



Def: Γ_f è rettificabile sse $\ell(\Gamma_f) < +\infty$

Oss: Se f è M-Lipschitziana $\Rightarrow \Gamma_f$ rettificabile

$$\ell(\Gamma_\pi) \le \sum_{k=1}^{n} \sqrt{(t_k - t_{k-1})^2 + M^2 (t_k - t_{k-1})^2}$$

$$\le \sum_{k=1}^{n} (t_k - t_{k-1}) \sqrt{1 + M^2} = \sqrt{1+M^2}\,(b-a)$$

FATTO: Si può costruire $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continua tale che

$\ell(\Gamma_{f_{|[a,b]}}) = +\infty \quad \forall\, a, b \in (0,1)$

Prop: Se $f \in C^1([a,b])$ allora Γ_f è rettificabile e

$$\ell(\Gamma_f) = \boxed{\int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx}$$

Dim: Sia π partizione $\quad \ell(\Gamma_\pi) = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{(t_k - t_{k-1})^2 + (f(t_k) - f(t_{k-1}))^2} =$

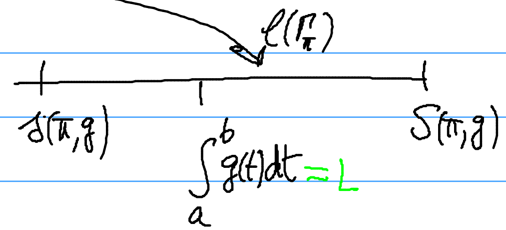
$$= \sum_{k=1}^{n} \sqrt{(t_k - t_{k-1})^2 + \left(f'(\xi_k)\,(t_k - t_{k-1})\right)^2} \qquad \text{con } t_{k-1} \leq \xi_k \leq t_k$$

$$= \sum_{k=1}^{n} (t_k - t_{k-1}) \sqrt{1 + \left(f'(\xi_k)\right)^2}$$

È una somma di Cauchy per $g(x) \doteq \sqrt{1+(f'(x))^2}$

$$\sum (t_k - t_{k-1})\, m_k \leq \ell(\Gamma_\pi) \leq \sum_{k=1}^{n} (t_k - t_{k-1})\, M_k \qquad M_k = \sup_{[t_{k-1},t_k]} g$$

$$s(\pi, g) \leq \ell(\Gamma_\pi) \leq S(\pi, g) \qquad m_k = \inf_{[t_{k-1},t_k]} g$$



$$(*) \quad |\ell(\Gamma_\pi) - L| \leq S(\pi,g) - s(\pi,g) \leq (b-a)\,\omega_g(\delta_\pi)$$

oss: se π_n è la partizione uniforme questo mostra che

$$|\ell(\Gamma_{\pi_n}) - L| \leq (b-a)\,\omega_g\left(\frac{b-a}{n}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

Per terminare la dim basta verificare che $\boxed{\ell(\Gamma_\pi) \leq L \quad \forall \pi \text{ partizione}}$

Se π partizione

$$\ell(\Gamma_\pi) \leq \ell(\Gamma_{\pi\cup\pi_n}) \overset{(*)}{\leq} L + (b-a)\,\omega_g(\delta_{\pi\cup\pi_n}) \leq L + \underbrace{(b-a)\,\omega_g(\delta_{\pi_n})}_{\text{tende a zero per } n \to \infty} \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow \quad \ell(\Gamma_\pi) \leq L \qquad (\text{da cui } L \text{ è il sup})$$

<u>Esempio</u>: $f(x) = \frac{1}{2}x^2$ $\qquad \Gamma_f = \{(x, f(x)) : 0 \leq x \leq T\}$

$$\ell(\Gamma_f) = \int_0^T \sqrt{1 + x^2}\, dx = \int_0^\sigma \sqrt{\cosh^2(t)}\, \cosh(t)\, dt \qquad \text{con } \sigma \doteq \sinh^{-1}(T)$$

$x = \sinh(t)$

$dx = \cosh(t)\,dt$

$1 + x^2 = 1 + \sinh^2(t) = \cosh^2(t)$

$$= \int_0^\sigma \cosh^2(t)\, dt \qquad \cosh^2(t) = \frac{1}{2}(1 + \cosh(2t))$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^\sigma [1 + \cosh(2t)]\, dt \leq \frac{\sigma}{2} + \left[\frac{1}{4}\sinh(2t)\right]_0^\sigma$$

$$\sinh(2t) = 2\sinh(t)\cosh(t)$$

$$= \frac{\sigma}{2} + \frac{1}{2}\left[\sinh(t)\cosh(t)\right]_0^\sigma = \frac{\sigma}{2} + \frac{1}{2}\, T\sqrt{1-T^2}$$

$$\text{con } \sigma = \sinh^{-1}(T)$$

<u>Esercizio</u>: Verificare che

$\sinh^{-1}(T) = \log(T + \sqrt{1+T^2})$

$$= \frac{1}{2}\left[\log(T + \sqrt{1+T^2}) + T\sqrt{1-T^2}\right]$$

EQUAZIONI DIFFERENZIALI LINEARI (del primo ordine)

$$\begin{cases} y' = a(x)y + b(x) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

con a, b funzioni reali

Ammette un' unica soluzione (fatto generale)

(CL) $$y(x) = y_0 e^{A(x)} + \int_{x_0}^{x} e^{A(x)-A(s)} b(s)\, ds$$ dove $A'(x) = a(x)$

Esempio:
$$\begin{cases} y' = 2yx + 1 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

$a(x) = 2x$
$A(x) = x^2$

(CL) $\Rightarrow$ $$y(x) = e^{x^2} + \int_{x_0}^{x} e^{x^2-s^2}\, ds$$

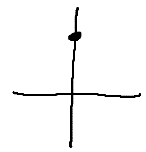
1

——— o ———

Es: Sia $b(x)$ una funzione limitata su $[0,+\infty)$
Mostrare che l'equazione (E) $y' = y + b(x)$ ammette un'unica soluzione limitata su $[0,+\infty)$

Oss: Se y_1, y_2 sono soluzioni di E
$w = y_2 - y_1$ soddisfa $w' = w$ $\Rightarrow$ $w(x) = c e^{x}$
quindi esiste al più una sol limitata su $[0,+\infty)$

$$e^{A(x)} = e^{x}$$



Per (CL) otteniamo che la sol di (E) con $y(0) = y_0$ è

$$y(x) = y_0 e^{x} + \int_0^x e^{x-s}\, b(s)\, ds = e^{x}\left[y_0 + \int_0^x e^{-s}\, b(s)\, ds \right]$$

Come scegliere y_0 in modo che questa quantità si mantenga limitata?

$$y_0 \doteq -\int_0^{+\infty} e^{-s}\, b(s)\, ds$$

(oss: l'integrale è assolutamente convergente $B \doteq \sup_s |b(s)|$

$$\int_0^{+\infty} e^{-s}\, |b(s)|\, ds \leq B \int_0^{+\infty} e^{-s}\, ds = B$$

Con questa scelta di y_0 otteniamo che $y(x) = e^{x}\left[-\int_x^{+\infty} e^{-s}\, b(s)\, ds \right]$

$$|y(x)| = \int_x^{+\infty} e^{x-s}\, |b(s)|\, ds \leq B \int_x^{+\infty} e^{x-s}\, ds = B \qquad (\forall\, x > 0)$$

Quindi la sol è limitata su $[0, +\infty)$

Es: Mostrare che, se $\alpha \notin \{0, 1\}$ allora

$y' + p(x) y = g(x) y^{\alpha}$ si riconduce a un' eq lineare del I ordine

ponendo $v \doteq y^{1-\alpha}$

$$\left[v' + (1-\alpha) p(x) v = g(x) \right]$$

Risolvere $y' + 2xy = y^3 x^3$

$$\boxed{\begin{array}{ll} p(x) = 2x & \\ g(x) = x^3 & \alpha = 3 \end{array}}$$

altri Es per casa

① Dire per quali $\alpha>0$ converge l'integrale

$$\int_0^{+\infty}\left[\frac{1}{x^\alpha}-\sin\frac{1}{x^\alpha}\right]dx$$

② Calcolare $\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \arctan\left(\frac{nx}{n+x}\right)dx$

28.4.2022

$$\int_0^{+\infty} \underbrace{\left[\frac{1}{x^\alpha} - \sin\frac{1}{x^\alpha}\right]}_{\varphi(x)} dx$$

per quali $\alpha > 0$ converge

$\sin t \leq t$

$\varphi(x) \geq 0 \quad \forall x \in [0, +\infty)$

devo verificare che convergono

$$\int_0^1 \varphi(x)\,dx \quad e \quad \int_1^{+\infty} \varphi(x)\,dx$$

$\int_0^1 \sin\frac{1}{x^\alpha}\,dx$ esiste

$\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}\,dx$ è finito $\iff \alpha < 1$

$\int_1^{+\infty} \varphi(x)\,dx$

$x \to +\infty \quad y := \frac{1}{x^\alpha} \quad y \to 0$

$y - \sin y \sim \frac{y^3}{6}$ per $y \to 0$ (taylor)

$\varphi(x) \sim \frac{1}{6 \cdot x^{3\alpha}}$ per $x \to +\infty$

converge $\iff 3\alpha > 1$

$\alpha > \frac{1}{3}$

Quindi $\int_0^{+\infty} \varphi(x)\,dx$ converge $\iff \frac{1}{3} < \alpha < 1$

— o —

$$\lim_{n \to \infty} \int_0^1 \arctan\left(\frac{nx}{n+x}\right) dx$$

$$\int_0^1 1\cdot \arctan\left(\frac{nx}{n+x}\right)dx = (*)$$

$f'(x) = 1 \qquad f(x) = x$

$g(x) = \arctan\left(\frac{nx}{n+x}\right) \qquad g'(x) = \frac{n^2}{(n+x)^2 + n^2x^2}$

$$\int_0^1 f'\cdot g\, dx = \left[f\cdot g\right]_0^1 - \int_0^1 f\cdot g'\, dx$$

$$g'(x) = \frac{1}{1+\left(\frac{nx}{n+x}\right)^2}\cdot \frac{n(n+\cancel{x}) - \cancel{nx}}{(n+x)^2}$$

$$(*) = \underbrace{\left[x \arctan\frac{nx}{n+x}\right]_0^1}_{a_n} - \underbrace{\int_0^1 \frac{x}{\left(1+\frac{x}{n}\right)^2 + x^2}\, dx}_{b_n}$$

$$a_n = \arctan\left(\frac{n}{n+1}\right) \xrightarrow{n\to\infty} \pi/4$$

$$\frac{x}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^2 + x^2} \leqslant \frac{x}{\left(1+\frac{x}{n}\right)^2 + x^2} \leqslant \frac{x}{1+x^2}$$

$$\frac{1}{2}\int_0^1 \frac{2x}{c+x^2}\, dx \qquad c = 1, \quad c = \left(1+\frac{1}{n}\right)^2$$

$$= \left[\frac{1}{2}\log\left(c+x^2\right)\right]_0^1 = \frac{1}{2}\log\frac{c+1}{c} =$$

$c=1$ — $\frac{1}{2}\log 2$

$c = \left(1+\frac{1}{n}\right)^2 \to \frac{1}{2}\log\left[\frac{(1+1/n)^2+1}{(1+1/n)^2}\right] \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{2}\log 2$

$$b_n \longrightarrow \frac{1}{2}\log 2$$

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \arctan\left(\frac{nx}{n+x}\right)dx = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\log 2$$

$F : I \times J$

$y' = F(x,y)$

$F(x,y) = f(y) \cdot a(x)$

$a : I \longrightarrow \mathbb{R}$

$f : J \longrightarrow \mathbb{R}$

a, f continue

$\boxed{\text{se } f \text{ è anche loc. lip, la sol loc è unica (valgono le ipotesi del teor. di Cauchy Lip)}}$

$$\begin{cases} y'(x) = f(y) \cdot a(x) \longleftarrow (E) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

$x_0 \in I$

$y_0 \in J$

$\boxed{\text{Oss: se } f(y_0) = 0 \text{ allora } y(x) \equiv y_0 \text{ è soluzione}}$

$f(y_0) \neq 0$

chiamo J_0 la componente connessa di $\{y : f(y) \neq 0\}$ che contiene y_0

f non cambia segno su J_0

(E) la riscrivo come $\dfrac{y'(x)}{f(y(x))} = a(x)$

se $G' = \dfrac{1}{f}$

$A' = a$

$$\frac{d}{dx}\left[G(y(x))\right] = \frac{d}{dx}\left[A(x)\right]$$

TFCI integrando su $x - x_0$

$$G(y(x)) - G(y(x_0)) = A(x) - A(x_0)$$

$$G(y(x)) = G(y_0) + A(x) - A(x_0)$$

$$y(x) = G^{-1}\left(G(y_0) + A(x) - A(x_0)\right)$$

per gli x per cui l'argomento appartiene a $G(J_0)$

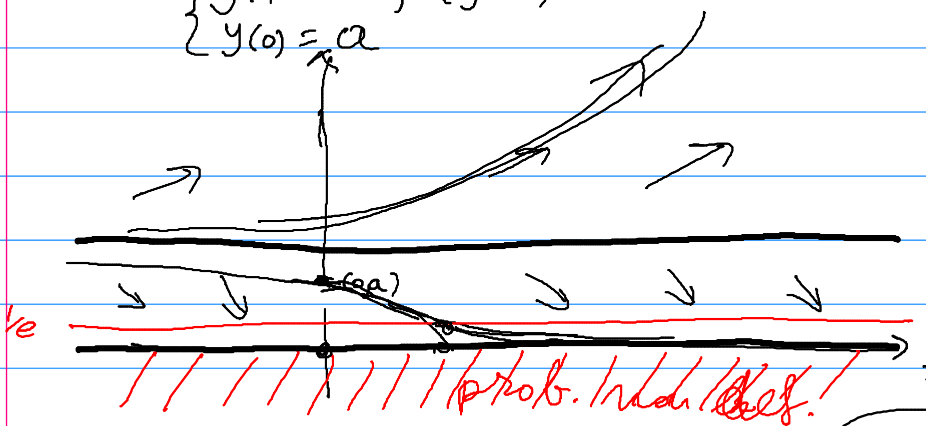
$G : J_0 \longrightarrow G(J_0)$

$y' = f(y)\cdot a(x) \qquad (x,y)\in I\times J$

$y' = f(y)$

Studiamo le soluzioni di

$\begin{cases} y'(x) = f(y(x)) \\ y(0) = a \end{cases}$



con $f(y) = \begin{cases} 0 & \text{se } y = 0 \\ y\log y & y > 0 \end{cases}$

oss: f è continua su $[0,+\infty)$

oss: $a(x) \equiv 1$ (caso autonomo) $\rightarrow$ se $y(x)$ è sol $y(x-\alpha)$ è sol

$I = \mathbb{R} \qquad J = [0,+\infty)$

$y_1 \equiv 1$, $y_0 \equiv 0$ $\rightarrow$ sono soluzioni costanti

$|F(x,y_1) - F(x,y_2)| \le L\,|y_1 - y_2|$ $(\mathcal{L})$

localmente per $(x,y_1), (x,y_2) \in Q$

intorno di $(0,a)$

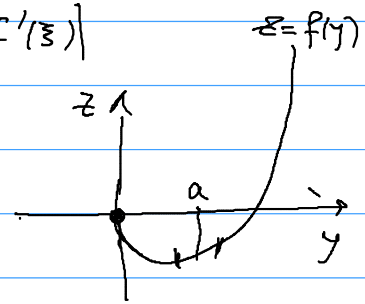
Oss: $F(x,y) = f(y)$

se $\delta > 0$ è piccolo

$y_1, y_2 \in [a-\delta, a+\delta]$

$F(x,y_1) - F(x,y_2) = f(y_1) - f(y_2) = f'(\xi)\,|y_1 - y_2|$

Quindi la condizione $(\mathcal{L})$ è verificata con $L = \max\limits_{|\xi - a|\le\delta} |f'(\xi)|$



$f(y) < 0$ se $0 < y < 1$

$f(y) > 0$ se $y > 1$

Oss: se $a \in (0,1)$ la sol del pb di Cauchy è definita su $(-\infty, a]$ perchè $a \le y(x) < 1$ se $x \in (-\infty, 0]$

$\exists \lim\limits_{x\to-\infty} y(x) = \ell$ (perché $y(x)$ è monotona)

e tale limite ℓ deve soddisfare $f(\ell)=0$

(perché altrimenti si avrebbe $\lim\limits_{x\to-\infty} y'(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} f(y(x)) = f(\ell)$)

$\Longrightarrow \lim\limits_{x\to-\infty} y(x) = 1$

un discorso analogo vale nel caso $a>1$

$y'(x) = f(y(x))$ $\qquad\qquad f'(y) = \log y + 1$

$y''(x) = f'(y(x))\, y'(x) = f'(y(x))\, f(y(x))$

$y''(x) = y \log y\,(\log y + 1)$

	0 – $\frac{1}{e}$	$\frac{1}{e}$ – 1	1 –
$\log y$	$-$	$-$	$+$
$\log y+1$	$-$	$+$	$+$

$y''<0 \iff \frac{1}{e} < y < 1$

———— o ————

Calcolo la soluzione usando quanto visto prima

$a(x) = 1 \qquad A(x) = x$

$1/f(y) = \dfrac{1}{y \log y} \qquad G(y) = \log|\log y|$

$$G(y(x)) = G(y(0)) + A(x) - A(0) \qquad G = \log|\log y|$$

$$\log|\log y(x)| = \log|\log a| + x$$

$$|\log y(x)| = |\log a|\, e^{x}$$

se $a > 1$ $\quad \log y(x) = (\log a) e^{x}$ $\quad y = \exp\left(|\log a| e^{x} \right)$

se $0 < a < 1$ $\quad \log y(x) = -|\log a|\, e^{x}$ $\quad y(x) = \exp\left(-|\log a|\, e^{x} \right)$

— o —

<u>Esercizio</u>: Fare lo studio qualitativo ~~il calcolo esplicito~~ delle soluzioni dell'equazione

$$y' = \sin y$$

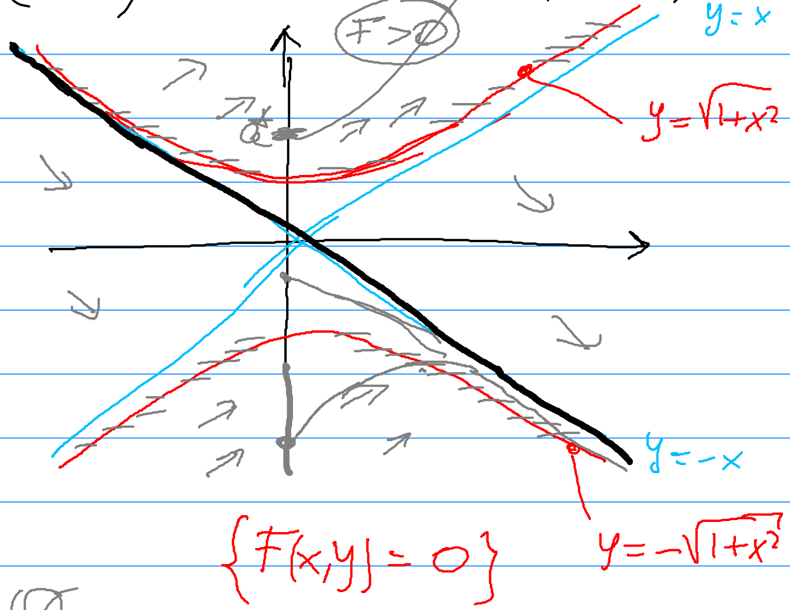
e calcolare la l'espressione esplicita della sol del problema di Cauchy nel caso $y(0) = \frac{\pi}{2}$ e $y(0) = \frac{3}{2}\pi$

— o —

$$y' = \overbrace{y^2 - x^2 - 1}^{F(x,y)} \qquad (*)$$

Studio qualitativo delle soluzioni

- $F(x,y)$ è continua in (x,y) e loc. lip in y
- OSS: $y(x) = -x$ è sol dell'equazione



$z(x) = x + y(x)$

$z' = z(z-x)$

Es: finire lo studio qualitativo

Esercizio

Se $F(x,y) = F(-x,-y)$ e y è sol di $y' = F(x,y)$ allora $v(x) = -y(-x)$ è ancora sol della stessa equazione $v' = F(x,v)$

$$\boxed{\text{28 apr 2022}}$$

$$y' = \underbrace{y^2 - x^2 - 1}_{F(x,y)} \qquad (E)$$

① Valgono le ipot. del th di Cauchy-Lip

② $y(x) = -x$ è soluzione

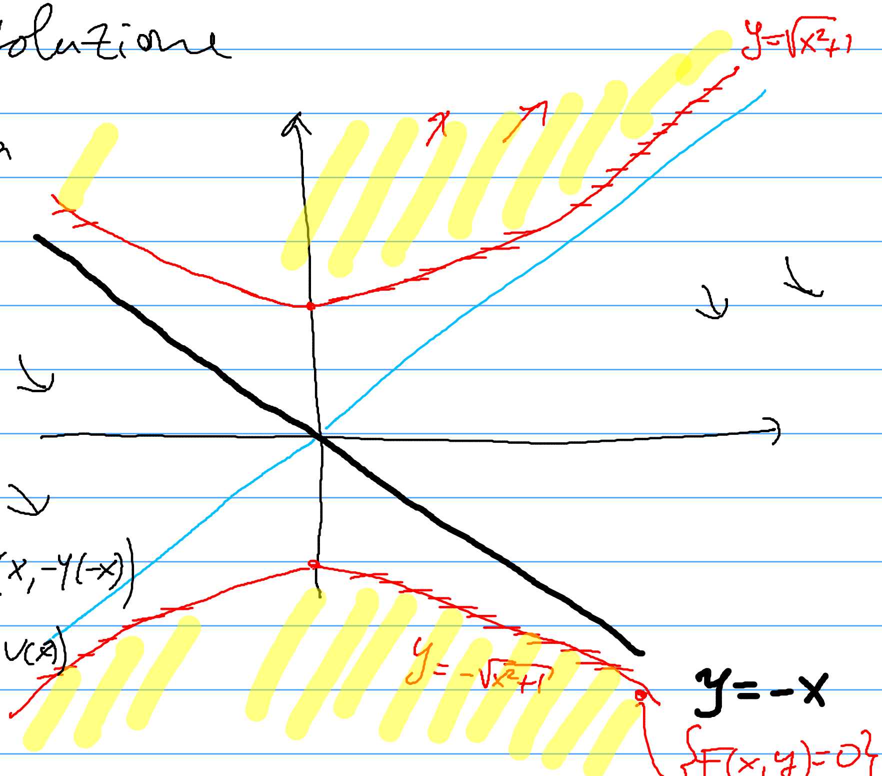
③ Crescenza decrescenza

④ $F(-x,-y) = F(-x,y) = F(x,-y)$

Se $y(x)$ è sol di (E)

anche $v(x) \doteq -y(-x)$ è sol di (E)

$$v'(x) = -y'(-x)\cdot(-1) = F(-x, y(-x)) = F(x, -y(-x))$$
$$= F(x, v(x))$$



$$(C_p) \quad \begin{cases} y' = F(x,y) \\ y(0) = p \end{cases}$$

<u>Prop</u>: Sia y_p è sol di (C_p) allora $\exists!\ p_* \in \mathbb{R}$ t.c.

(a) $p < p_*$ allora y_p è definita su $[0,+\infty)$

$$\lim_{x\to+\infty} y_p(x) + x = 0$$

(b) $p > p_*$ allora $\exists\, \omega = \omega(p)$ t.c.

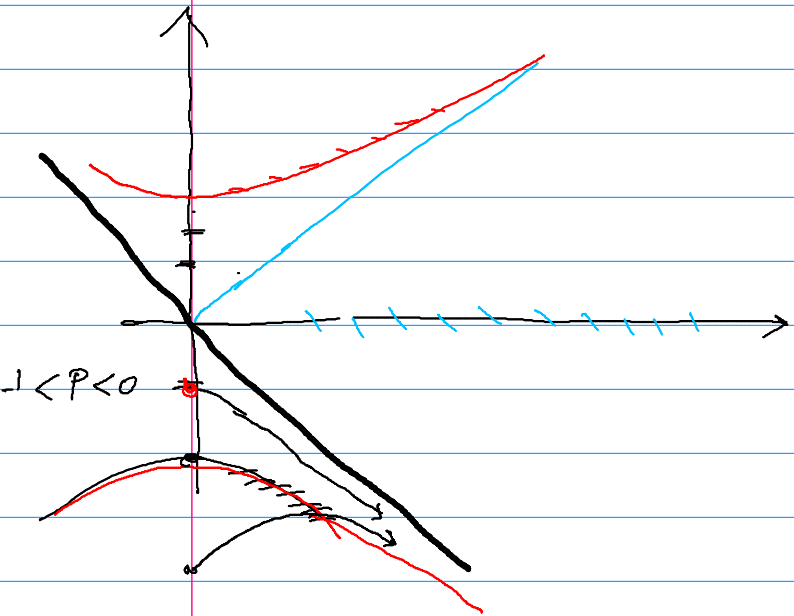
$$\lim_{x \to \omega} y_p(x) = +\infty$$

(c) $p = p_*$ $\quad y_{p_*}$ è definita su $[0,+\infty)$

e $\displaystyle\lim_{x\to\infty} y_{p_*} = +\infty$

$$x + \frac{1}{x} \leq y_{p_*}(x) \leq x + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}$$

per $x >> 1$



Se $p < 0$ $\quad y_p(x) \longrightarrow -x$ per $x \longrightarrow +\infty$

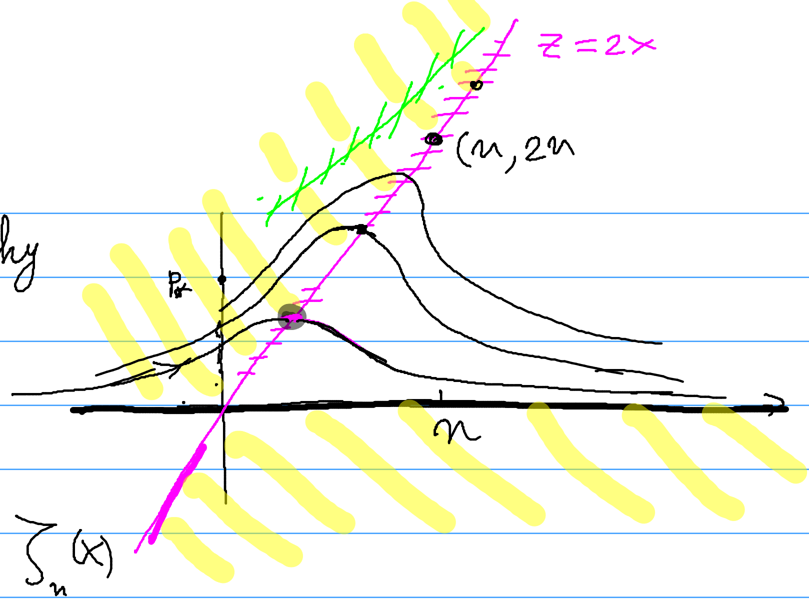
Se $p > 0$ $\quad z_p(x) = y_p(x) + x$. Se y_p è sol di C_p

$$z' = y' + 1 = \underbrace{(z-x)^2}_{y^2} - x^2 \cancel{-1} \cancel{+1} = z^2 - 2xz$$

$$\begin{cases} z' = z(z-2x) \\ z(0) = p \end{cases} \qquad (Z_p)$$

. . ..

ζ_n: la sol del pb. di Cauchy



$$\begin{cases} \zeta' = \zeta(\zeta - 2x) \\ \zeta(n) = 2n \end{cases}$$

$$\zeta_*(x) := \sup_{n \in \mathbb{N}} \zeta_n(x) = \lim_{n \to +\infty} \zeta_n(x)$$

$$G(x, z) = z(z - 2x)$$

<u>Prop</u> $\zeta_*(x) < +\infty \quad \forall x \in [0, +\infty)$

Sia $\xi(x) = 2x + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}$; ξ è una soluz per $z' = z(z-2x)$

$$\xi' < G(x, \xi)$$

$$G(x, \xi) - \xi' = \left(2x + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right) - 2 + \frac{1}{x^2} + \frac{2}{x^3}$$

$$= \cancel{2} + \text{posit.} \; \cancel{-2} + \frac{1}{x^2} + \frac{2}{x^3} > 0$$

$$\zeta_n(x) \leq \xi(x)$$

$$\zeta_*(x) \leq \xi(x)$$

FATTO: Se φ_n definite su $[a,b]$ e continue su $[a,b]$

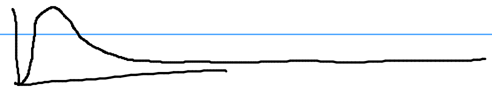
$$\boxed{\varphi_n(x) \geq \varphi_{n+1}(x) \geq 0}$$

$$\varphi_n(x) \searrow 0$$

$$\Longrightarrow \varphi_n(x) \to 0 \quad \text{uniformemente}$$

$$\sup_{x\in[a,b]} \varphi_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

OSS: Senza la monotonia questo potrebbe non essere vero



$$\varphi(x) = \frac{x}{1+x^2}$$

$$\varphi_n(x) \doteq \varphi(nx)$$

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_n(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

ma $\sup_{x\in[0,1]} \varphi_n(x) = 1$

$$\varphi_n(x) \doteq \zeta_* - \zeta_n$$

Grazie a questo fatto otteniamo $\zeta_n \to \zeta_*$ uniformemente su ogni intervallo $[0,b]$

E di conseguenza $\displaystyle\int_0^b G(x, \zeta_n(x))\,dx \to \int_0^b G(x, \zeta_*(x))\,dX$ per $n \to \infty$

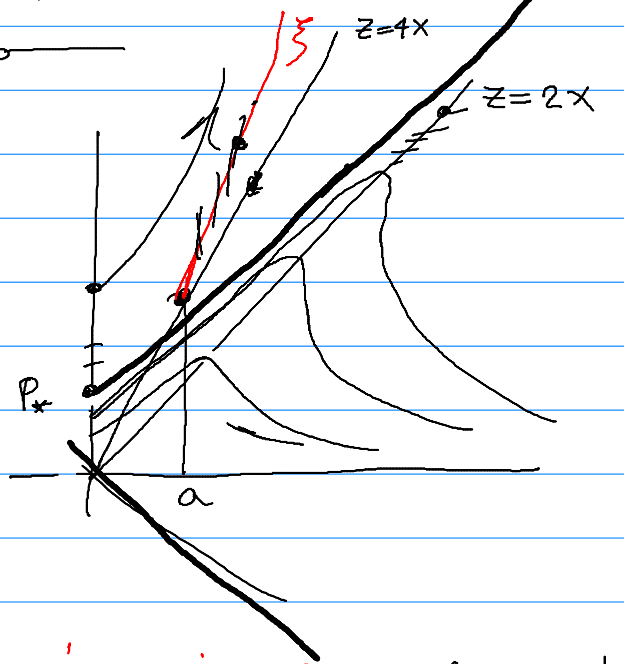
$$\zeta_n(b) - \zeta_n(0) = \int_0^b \zeta_n'(x)\,dx = \int_0^b G(x, \zeta_n(x))\,dx$$

$n \to +\infty$ $\downarrow$

$$\zeta_*(b) = \zeta_*(0) + \int_0^b G(x, \zeta_*(x))\,dx$$

$$\Longrightarrow \quad \zeta_*'(b) = G(b, \zeta_*(b)) \qquad \forall\, b \in \mathbb{R}$$

—— o ——



Sia ξ_a la sol del Pb di Cauchy

$$\begin{cases} \xi' = \dfrac{\xi^2}{2} \\ \xi(a) = 4a \end{cases} \qquad \text{per } a > 1.$$

$$\xi_a'(a) = \frac{(4a)^2}{2} = 8a^2 > 4$$

ξ_a convessa $\Longrightarrow$ $\xi_a(x) \geq 4x \quad \forall x \geq a$; ha asintoto vert.

$$\xi' = \frac{\xi^2}{2} = \xi\left(\xi - \frac{\xi}{2}\right) \leq \xi\left(\xi - \frac{4x}{x}\right) \qquad \xi' \leq G(x, \xi)$$

$p > p_*$

Se $\left(y_p - y_{p_*}\right)' = \left(y_p^2 - x^2 - 1\right) - \left(y_*^2 - x^2 - 1\right)$

$$= y_p^2 - y_*^2 = \left(y_p - y_*\right)\underbrace{\left(y_p + y_*\right)}_{\to +\infty}$$

Di conseguenza per $x >> 1$

$\varphi(x) \doteq y_p - y_*$

$\varphi' \geq \varphi$

$\Rightarrow \varphi$ cresce più che esponenzialmente

Quindi se $p > p_*$ $\quad y_p(x) - 4x \to +\infty$

e quindi y_p ha un tempo di vita finito $*$

— o —

$$\begin{cases} y' = \sin y \\ y(0) = a \end{cases}$$

sol staz. $\quad y = k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$

Se $y(x)$ è soluzione di $y' = \sin y$ allora anche

(a) $y(x+a)$ è sol $(\forall a \in \mathbb{R})$

(b) $y(x) + 2\pi$ è sol

(c) $-y(x)$ è sol

$v(x) = -y(x)$ $\qquad v'(x) = -y'(x) = -\sin y(x) = \sin -y(x)$
$= \sin v(x)$

Per trovare tutte le soluzioni basta trovare quelle per $a \in [0, \pi]$

$$\begin{cases} y' = \sin y \\ y(0) = a \in [0,\pi) \end{cases} \qquad \frac{y'}{\sin y} = 1$$

$t = \tan \frac{y}{2}$

$G'(y) = \dfrac{1}{\sin y}$ $\qquad \int \frac{1}{\sin y}\, dy = \int \frac{1}{\frac{2t}{1+t^2}} \cdot \frac{2\,dt}{1+t^2}$

$= \int \frac{1}{t}\, dt = \log|t|$

$= \log\left|\tan \frac{y}{2}\right|$

se $0 < y < \pi$

$\log \tan \frac{y}{2} = \log \tan \frac{a}{2} + x$

$\tan \frac{y}{2} = \left(\tan \frac{a}{2}\right) e^x$

$0 < \frac{y(x)}{2} < \frac{\pi}{2} \implies y(x) = 2\arctan\left(\left(\tan\frac{a}{2}\right)e^x\right)$

se $a \in (0, \pi)$

E la sol per $a_1 = \frac{3}{2}\pi$ qual è ?

$$y_{\frac{3}{2}\pi} = 2\pi + y_{-\frac{\pi}{2}} = 2\pi - y_{\pi/2} = 2\pi - 2\arctan(e^x)$$

—— o ——

$$(C_0)\begin{cases} y' = \cos y \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

$\boxed{\text{mostrare che } y(x) = \underbrace{-y(-x)}_{v(x)}}$

Basta vedere che

v soddisfa lo stesso pb di Cauchy

$\boxed{v(0) = 0 \quad \text{ovvio}}$

$$v'(x) = -y'(-x)\cdot(-1) = \cos(y(-x))$$
$$= \cos(-y(-x))$$
$$= \cos(v(x))$$

v e y soddisfano C_0

$\implies v(x) = y(x) \quad \forall x$

UNICITÀ

Per esercizio calcolare le soluzioni

Calcolare tutte le soluzioni di

$$y' = y \log^2 y \qquad (y \geq 0)$$

(• non c'è unicità
• alcune sol hanno un asintoto vert.)

— o —

Trovare tutte le soluzioni del pb di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \left(\log \sqrt{1+\sin^2 y}\right)^3 \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

— o —

Trovare le sol di $\quad y'_{(x)} = \sin(x + y_{(x)} + 1)$

Sugg: $z_{(x)} \doteq x + y_{(x)} + 1$

5 mag 2022

EQ. LIN. DI ORD SUPERIORE

$$(CS)\begin{cases} \vec{y}\,' = \vec{f}(x, \vec{y}) \\ \vec{y}(x_0) = \vec{y}_0 \end{cases}$$

$I \subseteq \mathbb{R}$ $\quad J \subseteq \mathbb{R}^n$ $\quad (x_0, \vec{y}_0) \in I \times J$

$f : I \times J \longrightarrow \mathbb{R}^n$

f continua Loc Lip in y

allora (CS) ammette soluz. unica (localmente)

Inoltre se $f : I \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ e

$$|f(x,y)| \leq \alpha(x)|y| + \beta(x) \quad \text{con } \alpha, \beta \geq 0 \text{ continue}$$

allora la soluzione di (CS) è definita su I

$$(E) \quad a_n(x)\, u^{(n)} + a_{n-1}(x)\, u^{(n-1)} + \dots + a_1(x) u' + a_0(x) u = b(x)$$

Eq lineare di ordine n

$a_j : I \longrightarrow \mathbb{R}$ continue

$a_n(x) > 0$, anzi $a_n(x) \equiv 1$

u funz. scalare incognita

Pongo $y_j(x) := u^{(j)}(x)$ $\quad 0 \leq j \leq n-1$

$Y(x) = (y_0(x), \dots, y_{n-1}(x))$ è sol del sistema

$$\begin{cases} y_j'(x) = \left(u^{(j)}(x)\right)' = u^{(j+1)}(x) & 0 \leq j \leq n-2 \\ y_{n-1}'(x) = u^{(n)}(x) = -\sum_{j=0}^{n-1} a_j u^{(j)} + b(x) \end{cases}$$

$$(S) \quad \vec{y}\,' = \vec{A}(x) \cdot \vec{y} + \vec{B}(x)$$

$$A(x) = \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & & 0 & 0 \\ & \ddots & \ddots & & 0 \\ & 0 & & 1 & \\ & & & 0 & 0 \\ \hline -a_0(x) & -a_1(x) & \dots & -a_{n-1}(x) & \end{array}\right) \qquad B(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b(x) \end{pmatrix}$$

soluzioni del sistema (S) $\longleftrightarrow$ sol di (E)

$\vec{y}$ sol di (S) $\Longleftrightarrow$ $u \doteq y_0$ è sol di (E)

— o —

<u>Es</u>: Verificare che $f(x,y) = A(x)\cdot y + B(x)$ soddisfa le ipotesi del teorema di CL e $|f(x,y)| \leq \alpha(x)|y| + \beta(x)$

— o —

La soluzione di (S) è unica se si fissano le cond. iniziali

Pertanto anche l'eq. $Lu \doteq u^{(n)} + a_{n-1}(x) u^{(n-1)} + \dots + a_1 u' + a_0 u$

$$\begin{cases} Lu = b \\ u^{(j)}(x_0) = c_j \quad 0 \leq j \leq \ell - 1 \end{cases}$$

questo probl. di Cauchy di ord n ha soluzione unica

— o —

Struttura delle soluzioni

<u>PROP</u>: L'insieme delle soluzioni di $Lu = b$ (E) è uno spazio affine di <u>dimensione n</u>

eq. non omogenea

Dim: Se u_1 e u_2 sono soluzioni di (E).

$w \doteq u_1 - u_2$ soddisfa $\boxed{Lw = 0}$ (E_0)

Eq omogenea

$Lu_1 = b$
$Lu_2 = b$

$$Lw = L(u_1 - u_2) = Lu_1 - Lu_2 = b - b = 0$$

$Lw = 0$ è sp. vett perche è $\ker(L)$

$$L : C^n(I) \to C^0(I)$$

Considero w_k la soluzione dell' eq.

$$\begin{cases} Lw = 0 \\ w^{(j)}(x_0) = \delta_{kj} \end{cases}$$

$$\delta_{kj} = \begin{cases} 1 & j = k \\ 0 & \text{altrim} \end{cases}$$

FATTO $\{w_k : 0 \leq k \leq n-1\}$ è base di $\ker L$

(a) w_k sono indipendenti

$$0 = \sum_{k=0}^{n-1} \mu_k w_k \qquad \mu_k \in \mathbb{R} \quad 0 \leq k \leq n-1$$

$$0 = D^{\ell}\left(\sum \mu_k w_k\right) = \sum \mu_k w_k^{\ell}(x) \quad \forall x \in I.$$ Valutando in x_0

$0 \leq \ell \leq n-1$

$$0 = \sum_{k=0}^{n-1} \mu_k \underbrace{w_k^{\ell}(x_0)}_{\delta_{k\ell}} = \mu_\ell$$

Se $Lu = 0$ allora è comb lineare dei w_k

$u^{k}(x_0) = \mu_k \quad 0 \le k \le n-1$

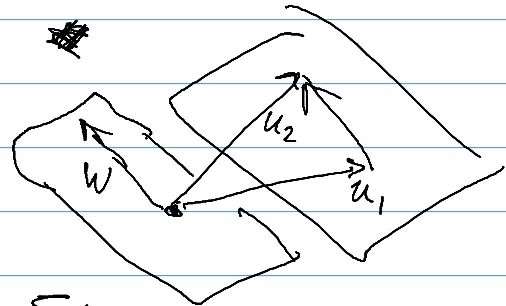
$$\bar{u} = \sum_{k=0}^{n-1} \mu_k w_k \qquad \begin{cases} L\bar{u} = 0 \\ \bar{u}^{(\ell)} = \mu_\ell \end{cases}$$

$$\bar{u}^{(\ell)}(x_0) = \sum \mu_k \, w_k^{(\ell)}(x_0) = \mu_\ell \qquad 0 \le \ell \le n-1$$

u e $\bar{u}$ soddisfano lo stesso pb di Cauchy

$\Longrightarrow u = \bar{u}$

—o—



OSS: L'insieme delle soluzione di $Lu = b$ si ottiene da una sol di $Lu_0 = b$ sommando una comb di $\sum \mu_k w_k$

$$u = u_0 + \sum_{k=0}^{n-1} \mu_k w_k$$

—o—

CASO DI COEFFICIENTI COSTANTI

$$u^{(n)} + a_{n-1} u^{(n-1)} + \dots + a_1 u' + a_0 u = b(x)$$

$a_j \in \mathbb{R} \qquad 0 \leq j \leq n-1$

(EN) $\quad P(D)u = b(x) \qquad\qquad P \in \mathbb{R}[\lambda]$

$P(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0$

Polinomio caratterist. dell'eq

Esempio: $\quad u'' - u = 0$

$D^2 u - u = 0 \qquad (D^2 - I)u = 0$

$D : C^\infty(I) \longrightarrow C^\infty(I)$

operatore lineare

$P, Q \in \mathbb{R}[\lambda] \qquad P = \sum a_i \lambda^i$

$Q = \sum b_j \lambda^j$

$$P(D) \circ Q(D)\, u = P(D)\left(\sum b_j u^{(j)}\right)$$

comp. di operatori

$$= \sum_i \sum_j a_i b_j u^{(j+i)} = (P \cdot Q)(D)\, u$$

prodotto di polinomi

Esempio: $\quad P(\lambda) = \lambda - 1$

$Q(\lambda) = \lambda + 1 \qquad P(D) \cdot Q(D) = (P \cdot Q)(D) = D^2 - I$

① Come trovare le soluzioni di $P(D)u=0$?

$$P(\lambda)=\prod_{j=1}^{r}(\lambda-\lambda_j)^{m_j}$$

λ_j sono radici distinte

$$\sum_{j=1}^{r} m_j = n = gr(P)$$

$$\operatorname{Ker} P(D) \supseteq \operatorname{Ker}(D-\lambda_j)^{m_j} \quad \forall\ 1\le j\le r$$

$$P(\lambda)=\hat{P}_j(\lambda)(\lambda-\lambda_j)^{m_j}$$

$$P(D)u=\hat{P}_j(D)\circ \underline{(D-\lambda_j)^{m_j}\ u}$$

$u\in \operatorname{Ker}(D-\lambda_j)^{m_j} \Rightarrow u\in \underline{\operatorname{Ker}}\ P(D)$

TEOREMA:

$$\operatorname{Ker}(P(D))=\bigoplus_{j=1}^{r}\operatorname{Ker}(D-\lambda_j)^{m_j}$$

LEMMA$_0$: $\operatorname{Ker}(D^m)=\{q\in\mathbb{R}[x] : gr(q)<m\}$

LEMMA 1: (a) $D-\lambda = E_\lambda\circ D\circ E_{-\lambda}$ $\qquad (E_\lambda u)(x):=u(x)e^{\lambda x}$

(b) $(D-\lambda)^m = E_\lambda\circ D^m\circ E_{-\lambda}$ $\qquad E_\lambda\circ E_{-\lambda}=I$

Dim (a). $E_{\lambda} \circ D \circ E_{-\lambda}\, u = u' - \lambda u = (D-\lambda)\, u$

$$u(x) \xrightarrow{E_{-\lambda}} u(x)\, e^{-\lambda x} \xrightarrow{D} \left(u'(x) - \lambda u(x)\right) e^{-\lambda x} \longrightarrow u'(x) - \lambda u(x)$$

(b) è ovvio

<u>Lemma 2</u>. $\operatorname{Ker}(D-\lambda)^m = \left\{ u = q(x)\, e^{\lambda x} \quad \begin{matrix} q \in \mathbb{R}[x] \\ \operatorname{gr}(q) < m \end{matrix} \right\}$

<u>Dim</u>: $(D-\lambda)^m q(x) e^{\lambda x} = E_{\lambda} D^m E_{-\lambda} \left(q(x) e^{\lambda x} \right)$

$$= E_{\lambda} D^m \left(q(x) \right) = 0$$

Questo dimostra $\operatorname{Ker}(D-\lambda)^m \supset \{ u = q(x) e^{\lambda x} \quad \operatorname{gr}(q) < m \}$

e vale $=$ per una questione di dimensione.

$$\sum_{j=1}^{r} \operatorname{Ker}(D-\lambda_j)^{m_j} \subseteq \operatorname{Ker} P(D)$$

$\dim V = m_1 + \dots + m_r = n$

Considero l'applicazione

$$V \doteq \mathrm{Ker}\,(D-\lambda_1)^{m_1} \times \dots \times \mathrm{Ker}\,(D-\lambda_r)^{m_r} \longrightarrow \mathrm{Ker}\,(P(D))$$

$$(v_1, \dots, v_r) \longmapsto v_1 + \dots + v_r$$

Per terminare la dim. del teorema basta verificare che

$$\boxed{v_1 + \dots + v_r = 0 \implies v_j = 0 \quad \forall j \in \{1, \dots, r\}}$$

<u>Lemma</u>: Se $\lambda \neq \mu$ allora

$D-\mu : \mathrm{Ker}\,(D-\lambda)^m \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ker}\,(D-\lambda)^m$ è un isomorfismo

Dim Lemma: $u(x) = q(x)\, e^{\lambda x}$ $\quad gr(q) < m$

$(D-\mu)\, u = E_\mu \circ D \circ E_{-\mu}\, u =$

$$u(x) = q(x)e^{+\lambda x} \xrightarrow{E_{-\mu}} q(x)e^{(\lambda-\mu)x} \xrightarrow{D} (q' + (\lambda-\mu)q)e^{(\lambda-\mu)x} \; - \; \dots$$

$$\xrightarrow{E_\mu} (q' + (\lambda-\mu)q)e^{\lambda x}$$

$$gr(q) = gr(q' + (\lambda-\mu)q)$$

$$\lambda \neq \mu \qquad q' + (\lambda-\mu)q = 0 \Longleftrightarrow q = 0$$

l'applicazione è iniettiva

è anche surgettiva

(su $\operatorname{Ker}(D-\lambda)^m$)

Dim teorema

$1 \leq j \leq r$ fissato $\qquad P(\lambda) = \hat{P}_j(\lambda)(\lambda-\lambda_j)^{m_j}$

$$v_1 + \dots + v_r = 0 \Rightarrow 0 = \hat{P}_j(D)(v_1 + \dots + v_r) = \hat{P}_j(D)(v_1 + \dots + v_r) = \hat{P}_j(D)v_j$$

$$\hat{P}_j(D) : \operatorname{Ker}(D-\lambda_j)^{m_j} \xrightarrow{\sim} \operatorname{Ker}(D-\lambda_j)^{m_j}$$

$$\hat{P}_j(D)v_j = 0 \Longrightarrow v_j = 0$$

vale $\forall j$

$\Longrightarrow$ ho la tesi del teorema.

$$u'' - 4u = 0 \qquad P(\lambda) = \lambda^2 - 4$$

$$\lambda_1 = 2 \qquad \lambda_2 = -2$$

$$u = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-2x}$$

$$u'' - 4u' + 4u = 0 \qquad P(\lambda) = \lambda^2 - 4\lambda + 4 = (\lambda - 2)^2$$

$$u = (c_0 + c_1 x) e^{2x}$$

E se ho radici complesse

Tutto quello che ho detto funz. su $C^\infty(I, \mathbb{C})$

Seguendo il ragionamento esposto sopra trovo

$\mathrm{Ker}\,(P(D))$ come ~~spp~~ sp di $C^\infty(I, \mathbb{C})$

$$\mathrm{Ker}\,(D - \lambda)^m = \{ u = q(x) e^{\lambda x} \ , \ q \in \mathbb{C}[x] \quad gr(q) < m \}$$

$\boxed{6 \text{ mag } 2022}$

COMPITINO: GIOV. 26 MAGGIO

EQ. DIFF. LIN. A COEFF. COSTANTI

$$\underbrace{u^{(n)} + a_{n-1} u^{(n)} + \dots + a_1 u' + a_0 u}_{P(D)\,u} = b(x)$$

funz continua

$\boxed{\text{Eq non omogenea}}$

$P \in \mathbb{R}[x]$ $\qquad a_j \in \mathbb{R} \quad 0 \leq j \leq n-1$

$$P(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0$$

POLINOMIO CARATT DELL' EQ

— o —

$P(D)\,u = 0$ eq. omogenea (per $b=0$)

$\left.\begin{array}{l} u'' - u = \sin x \\ (D^2 - I)\,u = \sin x \end{array}\right\}$ eq. non omogenea

$\mathrm{Ker}\,(P(D))$

$\boxed{\begin{array}{c} u'' - u = 0 \\ (D^2 - I)u = 0 \end{array}}$ eq omogenea

ℝ $D: C^\infty(I, \mathbb{R}) \longrightarrow C^\infty(I, \mathbb{R})$

ℂ $D: C^\infty(I, \mathbb{C}) \longrightarrow C^\infty(I, \mathbb{C})$

ℂ $\mathrm{Ker}\,((D-\lambda)^m) = \{u = q(x)\, e^{\lambda x} \qquad q \in \mathbb{C}[x]; \quad \mathrm{gr}(q) < m\}$

$\lambda = \alpha + i\beta$ con $\beta \neq 0$ $\qquad e^{\lambda x} = e^{(\alpha+i\beta)x} = e^{\alpha x}(\cos\beta x + i \sin\beta x)$

$$P(\lambda) = (\lambda-\lambda_1)^{m_1} \cdot \ldots \cdot (\lambda-\lambda_r)^{m_r}$$

$$\operatorname{Ker}\big(P(D)\big) = \bigoplus \operatorname{Ker}\left((D-\lambda_i)^{m}\right)$$

Come faccio a trovare una base reale nel caso ci siano radici complesse? $\xi = \alpha + i\beta$ $\quad P(\xi)=0$

$z(x) = e^{\alpha x}\left(\cos\beta x + i \sin(\beta x)\right)$ è sol a val complessi

$z \in \operatorname{Ker}(D-\xi)$

$u = \operatorname{Re}(z)$ $\quad P(D)\,u = P(D)\operatorname{Re} z \overset{\text{Linearità di } P(D) \,+\, \underline{P\in\mathbb{R}[x]}}{=} \operatorname{Re}\big(P(D)\,z\big) = 0$

$u(x) = e^{\alpha x}\cos\beta x$ è sol di $P(D)u=0$ $\quad u \notin \operatorname{Ker}(D-\xi)$

$u \in \operatorname{Ker}(D-\xi) \oplus \operatorname{Ker}(D-\bar{\xi})$

$$\left[\operatorname{Ker}(D-\xi)^{m} \oplus \operatorname{Ker}(D-\bar{\xi})^{m}\right] \cap C^{\infty}(I,\mathbb{R}) = \left\{u = q_1(x)e^{\alpha x}\cos\beta x + q_2(x)e^{\alpha x}\sin\beta x,\ \begin{matrix} q_1, q_2 \in \mathbb{R}[x] \\ gr(q_i) < m \end{matrix}\right\}$$

<u>Es:</u> $\quad u'' + u = 0 \qquad P(\lambda) = \lambda^2 + 1 \qquad \xi = \pm i$

$u(x) = a\cos x + b\sin x$

METODO DI SOMIGLIANZA (per EQ. DIFF. A C.C.)

$P \in \mathbb{R}[x]$

(N) $\quad P(D)u = b \qquad$ con $b \in \operatorname{Ker}(D-\mu)^{\ell}$

$$\boxed{u'' + 9u = x e^{2x}} \qquad \mu = 2 \quad \ell = 2$$

CASO NON RISONANTE

PROP: (a) Se $\boxed{P(\mu) \neq 0}$ allora $\exists!$ una soluz di (N) della forma $u(x) = q(x)\, e^{\mu x}$ con $gr(q) < \ell$

(b) Se $P(\mu) = 0$ allora $\exists!$ sol di (N) della forma $x^m q(x)\, e^{\mu x}$ con $gr(q) < \ell$

$\mu = 2 \qquad P(\lambda) = \lambda^2 + 9 \qquad P(2) = 13 \neq 0$

cerco una soluz $\quad u(x) = (a + bx)\, e^{2x}$

$$u'(x) = e^{2x}(b + 2a + 2bx)$$

$$u''(x) = e^{2x}(2b + 2b + 4a + 4bx)$$

$$u'' + 9u = e^{2x}(4b + 4a + 4bx + 9a + 9bx) \overset{?}{=} x e^{2x}$$

$4a + 4b + 9a = 0 \qquad 13b = 1 \qquad b = \frac{1}{13} \qquad a = -\frac{4}{13^2}$

$13a = -\frac{4}{13}$

Dim: (a) Se $\lambda \neq \mu \Rightarrow (D-\lambda): \operatorname{Ker}(D-\mu)^\ell \xrightarrow{\sim} \operatorname{Ker}(D-\mu)^\ell$

Se λ_i è radice di P $\quad (D-\lambda_i)^{m_i}$ è autom. di $\operatorname{Ker}(D-\mu)^\ell$

$\Rightarrow P(D) = (D-\lambda_1)^{m_1} \cdot \ldots \cdot (D-\lambda_r)^{m_r}$ è autom di $\operatorname{Ker}(D-\mu)^\ell$

$P(D): \operatorname{Ker}(D-\mu)^\ell \xrightarrow{\sim} \operatorname{Ker}(D-\mu)^\ell$ è surjettivo

b

Se $b \in \operatorname{Ker}(D-\lambda)^\ell \quad \exists!\, u \in \operatorname{Ker}(D-\lambda)^\ell : P(D)u = b$

(Caso b) $P(\mu) = 0$ cioé $\mu = \lambda_i$ per qualche i

$$P(D) = (D-\mu)^m \hat{P}(D) \qquad \hat{P}(\mu) \neq 0$$

$X: u(x) \longrightarrow x\, u(x)$

$$P(D): X^m \operatorname{Ker}(D-\mu)^\ell \xrightarrow{\sim} \operatorname{Ker}(D-\mu)^\ell$$

$$P(D) = \hat{P}(D)\,(D-\mu)^m$$

$$X^m \operatorname{Ker}(D-\mu)^\ell \xrightarrow[\sim]{(D-\mu)^m} \operatorname{Ker}(D-\mu)^\ell \xrightarrow[\sim]{\hat{P}(D)} \operatorname{Ker}(D-\mu)^\ell$$

e si conclude come nel caso precedente.

— o —

Att. nel caso b sia del tipo $q(x)e^{\alpha x}\cos\beta x$
$q(x)e^{\alpha x}\sin\beta x$

— o —

(NR) $u''+u'+u = \sin x$ $P(\lambda)=\lambda^2+\lambda+1$

cerco una soluzione della forma $\sin x = \Im(e^{ix})$

$u(x) = a\cos x + b\sin x$ $\mu = i$

$u'(x) = -a\sin x + b\cos x$ $P(i) = i \neq 0$

$u''(x) = -a\cos x - b\sin x$

$\oplus$

$u''+u'+u = -a\sin x + b\cos x \overset{?}{=} \sin x$ $a=-1$ $b=0$

$u(x) = -\cos x$

Metodo alternativo considero l'eq $z''+z'+z = e^{ix}$ (NC)
su $C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{C})$

$z(x) = c e^{ix}$ con $c\in\mathbb{C}$

$z'(x) = ic e^{ix}$

$z''(x) = -c e^{ix}$

$z''+z'+z = ic e^{ix} \overset{?}{=} e^{ix}$

$c = -i$

$z = -i e^{ix}$ è sol di (NC) $\Rightarrow \Im(-ie^{ix})$ è sol di (NR)

$$-i e^{ix} = (-i \cos x \pm \sin x)$$

$$\operatorname{Im}(-i e^{ix}) = -\cos x$$

(N) $$u'' + 2u' + 5u = e^{x} \sin 2x$$

Trovare tutte le soluzioni di questa eq

$$P(D)u = b \qquad \boxed{\operatorname{Im} e^{(1+2i)x}}$$

$$P(\lambda) = \lambda^2 + 2\lambda + 5$$

$$\lambda^2 + 2\lambda + 5 = 0$$

$$\lambda_\pm = -1 \pm \sqrt{1-5} = \begin{cases} -1+2i \\ -1-2i \end{cases}$$

$$e^{-x}(\cos 2x + i \sin 2x)$$

$$\operatorname{Ker} P(D) = \{ e^{-x}(a \cos 2x + b \sin 2x) \}$$

soluz. dell'omogenea

Cerco soluzioni di (N) della forma

$$u(x) = A e^{x} \sin 2x + B e^{x} \cos 2x$$

ES: Finire i conti per casa

ES*: Trovare tutte le soluzioni nel caso $b = e^{-x} \sin 2x$

$$u'' + 2u' + 5u = e^{-x} \sin 2x$$

Es:

Trovare le sol delle seg eq. omogenee

$$u''' - 2u'' - 3u' = 0$$

—— o ——

Trovare tutte le soluzioni di

$$\underbrace{u''' - 2u'' + u' - 2u}_{P(D)u} = \sin x + x^2 e^x$$

$$P(D)u_1 = \sin x$$

$$P(D)u_2 = x^2 e^x$$

$$P(D)(u_1 + u_2) = \sin x + x^2 e^x$$

METODO DI VARIAZIONE DELLE COSTANTI
(Per eq. diff del II° ord)

$$Lu = u'' + a_1(x)u' + a_0(x)u$$

$$Lu = b$$

suppongo di avere w_1, w_2
soluz. linearmente indip di $Lw=0$

Cerco una soluzione $u(x) = c_1(x)\,w_1(x) + c_2(x)\,w_2(x)$
dove c_1, c_2 funz. incognite determinabili con una integraz

$$u'(x) = \boxed{c_1'(x)\,w_1(x) + c_2'(x)\,w_2(x)} + c_1 w_1' + c_2 w_2'$$

$$u''(x) = c_1' w_1' + c_2' w_2' + c_1 w_1'' + c_2 w_2''$$

$$Lu = b \iff c_1(\underbrace{Lw_1}_{0}) + c_2(\underbrace{Lw_2}_{0}) + c_1' w_1' + c_2' w_2' = b$$

$$\begin{cases} c_1' w_1 + c_2' w_2 = 0 \\ c_1' w_1' + c_2' w_2' = b \end{cases}$$

$$\downarrow$$

$$\begin{pmatrix} w_1 & w_2 \\ w_1' & w_2' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1' \\ c_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix}$$

Es$_1$: Verificare che se w_1 e w_2 sono lin. indip. allora la matrice è sempre invertibile

$\Delta = w_1 w_2' - w_1' w_2$

Es$_2$: Verificare che $\Delta(x)$ il determ. della matrice $\Delta' = -a_1(x)\Delta$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} c_1' \\ c_2' \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} w_2' & -w_2 \\ -w_1' & w_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} c_1' = -\frac{1}{\Delta} w_2 b \\ c_2' = \frac{1}{\Delta} w_1 b \end{cases}$$

$\rightsquigarrow$ ricavo c_1 e c_2 mediante integraz

sono definite a meno di costanti

Es / esercizio

$(*)$ $\quad u'' - u = f(x)$ $\qquad$ con $\lim_{|x|\to+\infty} f(x) = 0$

(a) Scrivere tutte le soluz. dell'eq $(*)$

(b) Mostrare che $\exists!$ sol di $(*)$ t.c. $\lim_{|x|\to\infty} u(x) = 0$

$u'' - u = 0 \qquad w_1 = e^{-x} \qquad w_2 = e^{x}$

Cerco una sol della forma $\quad u(x) = c_1(x) e^{-x} + c_2(x) e^{x}$

$$w_1' = -e^{-x} \qquad w_2' = e^{x}$$

$$\begin{cases} c_1' = -\frac{1}{2} e^{x} b(x) \\ c_2' = \frac{1}{2} e^{-x} b(x) \end{cases} \qquad \Delta = w_1 w_2' - w_1' w_2 = 2$$

$$c_1(x) = k_1 - \frac{1}{2} \int_0^x e^{t}\, b(t)\, dt$$

$$c_2(x) = k_2 + \frac{1}{2} \int_0^x e^{-t}\, b(t)\, dt$$

$$u(x) = \underbrace{e^{-x}\left(k_1 - \frac{1}{2}\int_0^x e^{t} b(t)\, dt\right)}_{A(x)} + \underbrace{e^{x}\left(k_2 + \frac{1}{2}\int_0^x e^{-t} b(t)\, dt\right)}_{B(x)}$$

Se $\quad k_1 = -\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{0} e^{t} b(t)\, dt \quad ; \quad k_2 = -\frac{1}{2}\int_0^{+\infty} e^{-t} b(t)\, dt$

Ottengo che $\quad \lim\limits_{|x|\to+\infty} A(x) = \lim\limits_{|x|\to+\infty} B(x) = 0$

$$A(x) = -\frac{e^{-x}}{2}\left(\int_{-\infty}^{0} e^{t} b(t) + \int_0^x e^{t} b(t)\right) = -\frac{e^{-x}}{2}\int_{-\infty}^{x} e^{t} b(t)$$

finire per casa